§ 3.2　平面与点的相关位置

一、空间平面与点的位置关系：

设空间的点为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，平面 π 为：$Ax + By + Cz + D = 0$

1.点在平面上的条件：

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

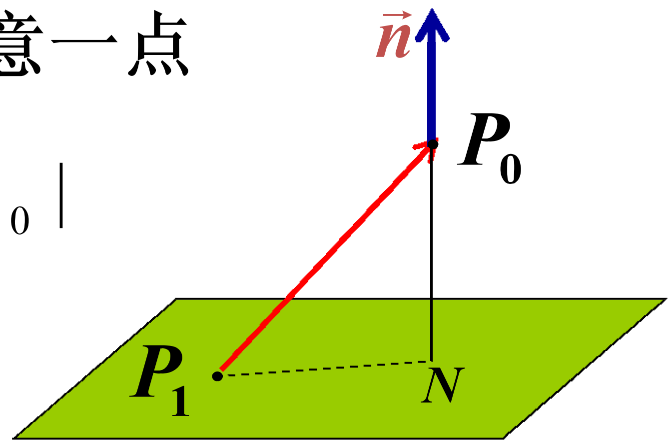
2.点不在平面上的条件：

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

二、空间点到平面的距离：

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点，求 P_0 到平面的距离 d.

解 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为平面上任意一点



$$d = \left|P_0N\right| = \left|\mathrm{Pr}\,j_{\vec{n}}\,\overrightarrow{P_1P_0}\right|$$

$$\mathrm{Pr}\,j_n\overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{n^0}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{n^0}=\left\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right\}$$

$$\therefore \ \mathbf{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0}=\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{n^0}$$

$$=\frac{A(x_0-x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

又由于点M_1在平面π上，则：$(Ax_1+By_1+Cz_1)+D=0$

$$\therefore d=\left|P_0N\right|=\left|\Pr j_n\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例1 在y轴上求一点，使它到平面$x+2y-2z-2=0$的距离为$d=4$

解：设所求y轴上的点为$(0, y_0, 0)$，依点到平面的距离公式有：

$$\frac{|2y_0-2|}{\sqrt{1+4+4}}=4$$

即：$|y_0-1|=6$

则：$y_0=7$或-5

故所求点为：$(0,7,0)$与$(0,-5,0)$

三、平面划分空间问题

平面 $Ax + By + Cz + D = 0$

空间任一点M（x,y,z)对平面的**离差**为

$\delta=\lambda(Ax+By+Cz+D)$， λ 为法式化因子

则 $Ax+By+Cz+D=\frac{1}{\lambda}\delta$ 需 $\lambda D \le 0$

因为位于平面同侧的点，δ 的符号相同；

位于平面异侧的点，δ 的符号相反，

因此平面将空间分为两个部分：

满足 $Ax+By+Cz+D>0$ 的点位于平面的上部；

满足 $Ax+By+Cz+D<0$ 的点位于平面的下部。

小节：

空间平面与点的位置关系

空间点到平面的距离

平面划分空间问题

作业：

P109: 3, 6（2），8