§ 3.3 两平面的相关位置

一、两平面位置特征：

TH3.3.1 两平面 $A_1x + B_1y + C_1 + D_1 = 0$ 与

$$A_2x + B_2y + C_2 + D_2 = 0$$

两平面的法向量为： $\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}, \overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$

1.相交的充要条件是：$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

2.平行的充要条件是：$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

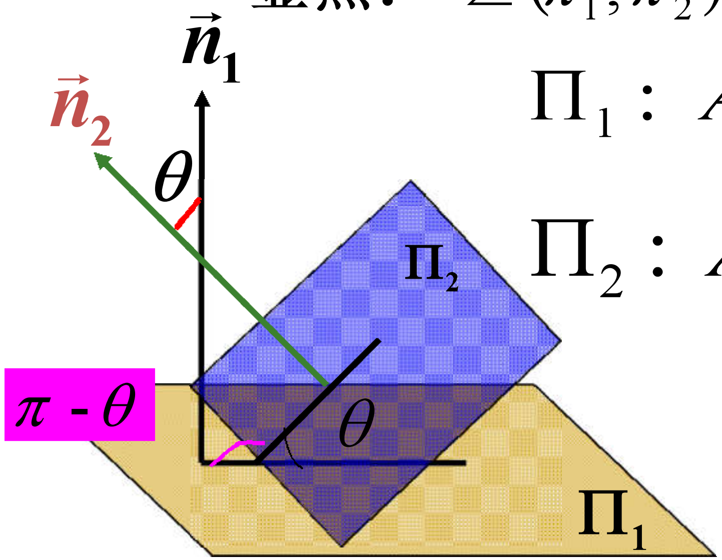
3.重合的充要条件是：$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

二、两平面夹角：

定义 **两平面法向量之间的夹角** θ

用两平面之间的二面角$\angle(\pi_1,\pi_2)$来表示.

显然：$\angle(\pi_1,\pi_2)=\theta$或$\pi-\theta$



$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},$$

$$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\cos\theta$$

$$=\pm\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

此即两平面夹角余弦公式

小结论：

(1) $\pi_1\perp\pi_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;}$

(2) $\pi_1 // \pi_2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}.$

例1 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\quad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\quad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\quad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $\cos\theta=\dfrac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

还可以怎样判别？

(2) $2x - y + z - 1 = 0, \qquad -4x + 2y - 2z - 1 = 0$

$\vec{n}_1 = \{2,-1,1\}, \qquad \vec{n}_2 = \{-4,2,-2\}$

$\Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2},$ 两向量平行

$\because M(1,1,0) \in \pi_1 \quad M(1,1,0) \notin \pi_2 \therefore$ 两平面平行但不重合.

(3) $2x - y - z + 1 = 0, \qquad -4x + 2y + 2z - 2 = 0$

$\because \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{-2},$

$\therefore$ 两平面重合.

例 2 求两平面 $z = x + 2y + 1$, $3x + 6y - 3z = 4$ 间的距离.

解 先判断两平面是否平行 .

$\vec{n}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{n}_2 = (3, 6, -3)$,

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{-1}{-3} \Rightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 .$$

在第一个平面内任取一点，比如（0，0，1），

$$d = \frac{|3 \times 0 + 6 \times 0 - 3 \times 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{3\sqrt{6}} .$$