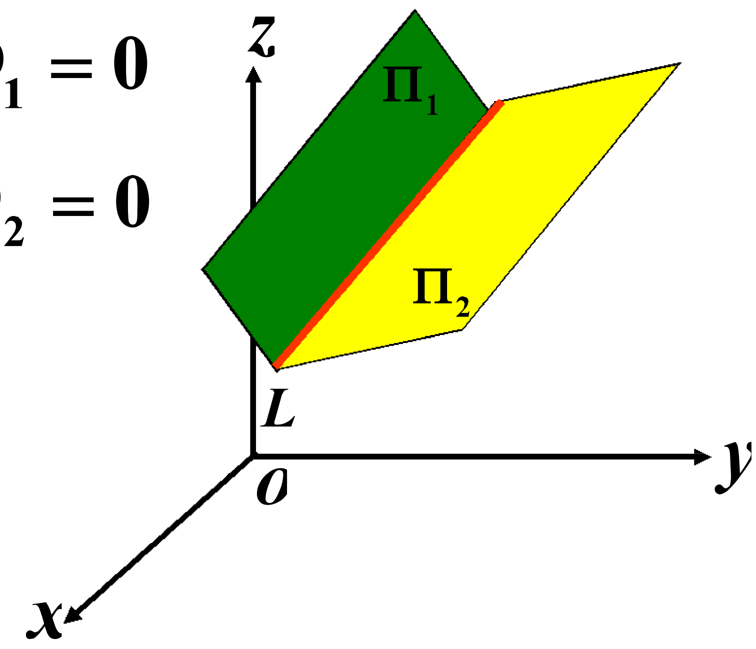
§ 3.4 空间直线的方程

一、空间直线的一般方程

定义 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

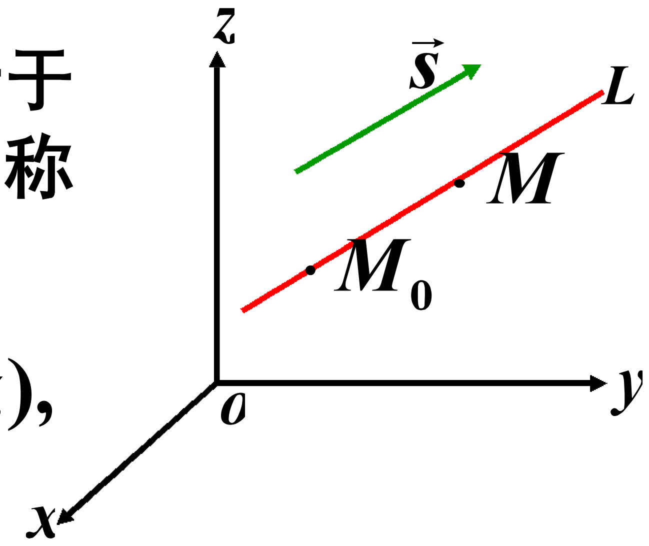
此即空间直线的一般方程

（注：两平面不平行）

二、空间直线的对称式方程

方向向量的定义：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的**方向向量**.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$,

$\forall\, M \in L$, $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$

$\vec{s} = \{m, n, p\}$, $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

直线的对称式方程

（也称点向式方程）

注：当方向向量的某个坐标 为零时，比如

$m = 0, n \neq 0, p \neq 0$时，方程仍然写为

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

此时理解为二平面的交 线 $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$

当方向向量的某两个坐 标为零时，比如

$m = 0, n = 0, p \neq 0$时，方程也仍然写为

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p}$$

理解为交线 $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$（考虑其几何意义）

例1 求过点(1,0,-2)且与平面$3x+4y-z+6=0$平行,又与直线 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}$ 垂直的直线方程.

解：设所求线的方向向量为$\vec{s}$,

已知平面的法向量 $\vec{n}=\{3,4,-1\}$,

已知直线的方向向量$\vec{s}_1=\{1,4,1\}$，取 $\vec{s}=\vec{n}\times\vec{s}_1$

$$\vec{s}=\vec{n}\times\vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\{8,-4,8\}=4\{2,-1,2\}$$

因此,所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$$

三、空间直线的坐标式参数式方程

由直线的对称式方程 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

直线的一组方向数

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

直线的坐标式参数方程

例2 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0 + z_0 + 2 = 0 \\ y_0 - 3z_0 - 6 = 0 \end{cases},$

解得 $y_0 = 0, \quad z_0 = -2$

点坐标$(1,0,-2)$,

已知直线：$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$.

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{4,-1,-3\}$,

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}=t$,

参数方程 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-t \\ z=-2-3t \end{cases}$. $t\in(-\infty,+\infty)$

例 3 一直线过点$(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交，

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}$,

所求直线方程 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

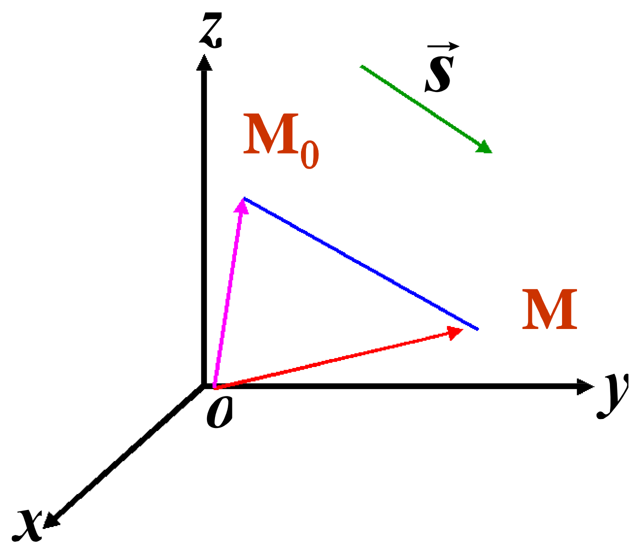
或 $$\begin{cases} y=-3 \\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z-4}{4}. \end{cases}$$

四、直线的向量式参数方程

$$\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{s}$$

即 $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s}$

也即 $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}$



此方程称为直线的向量式参数方程，**t**为参数