§ 3.7 空间两直线的相关位置

一、两直线的位置关系：

直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$，

直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$，

1.异面：

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

2.共面：

①相交： $\Delta = 0$ 且 $X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2$

②平行： $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2$

$$\neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

③重合： $X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2$

$$= (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

例 1 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

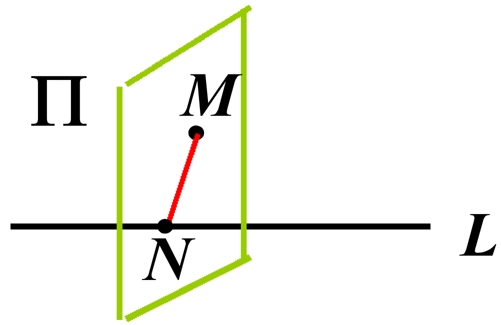
解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

例 2　求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.



解　先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 1. \\ z = -t \end{cases} \qquad 3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN} = \{\frac{2}{7}-2, \frac{13}{7}-1, -\frac{3}{7}-3\} = -\frac{6}{7}\{2,-1,4\},$$

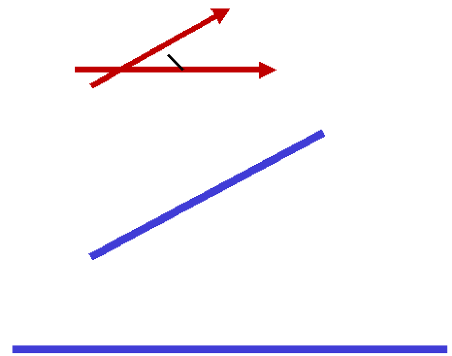
所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

二、空间两直线夹角：

定义 两直线的方向向量的夹角称之为该两直线的夹角.（锐角）

直线 $L_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 $L_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,



$$\cos(L_1 \hat{,} L_2)=\left|\cos(\vec{s}_1 \hat{,} \vec{s}_2)\right|$$

两直线的夹角公式

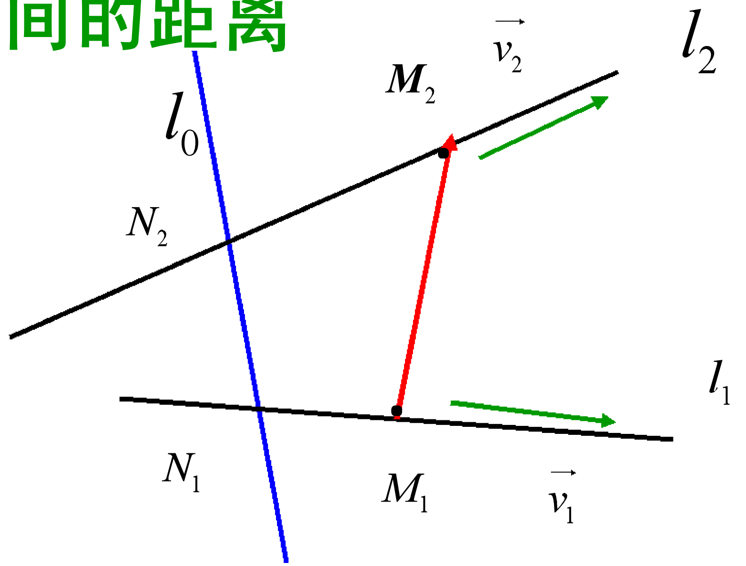
$$\cos(L_1 \hat{,} L_2)=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

三、两异面直线间的距离与公垂线方程：

1.公垂线：与两异面直线都垂直相交的直线叫做两异面直线的公垂线。

2.异面直线间的距离：公垂线夹于两异面直线间的线段的长即两异面直线上点之间的最短距离。

1. 两异面直线间的距离



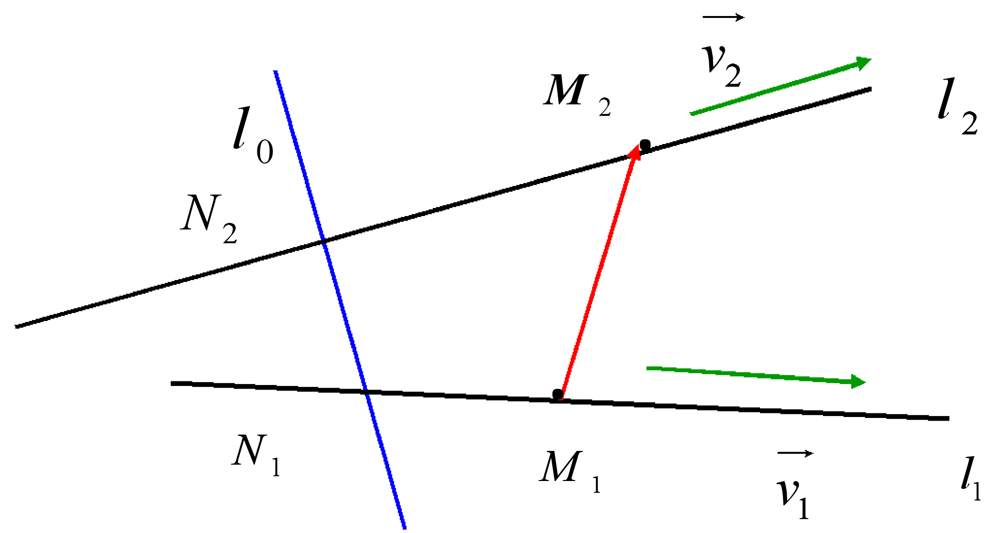
设两异面直线 l_1与l_2 ，与它们的公垂线 l_0

其交点分别为 N_1与N_2，

M_1与M_2分别为 l_1与l_2上的点

$\overrightarrow{v_1}$与$\overrightarrow{v_2}$分别是 l_1与l_2的方向向量。

则： $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$与 l_0平行



l_1与 l_2的距离为：

$$d = \left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \left|\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\text{射影}_{v_1\times v_2}\overrightarrow{M_1M_2}\right|$$

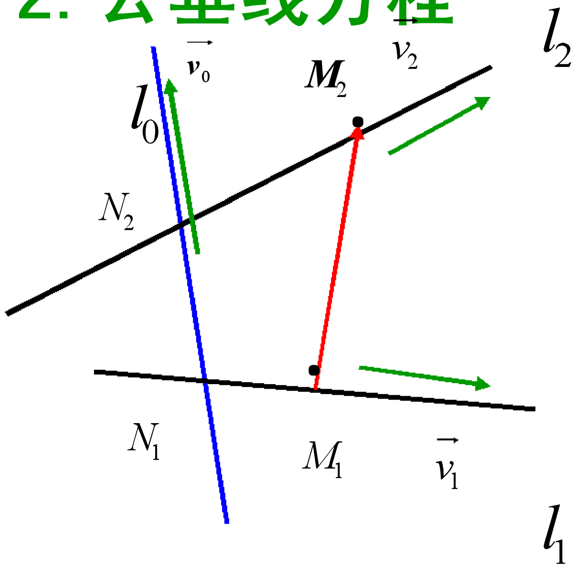
$$= \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)\right|}{\left|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\right|}$$

平行六面体的体积

平行四边形的面积

几何意义： 距离d为平行六面体的高

2. 公垂线方程



l_1与l_2的公垂线　l_0可以看做：

l_1，l_0决定的平面　π_1与
l_2，l_0决定的平面　π_2的交线

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

则：

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0,\ \pi_2:\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0$$

其中：$\{X, Y, Z\} = \vec{v}_0 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

公垂线方程即：两平面方程联立

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

其中：$\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}_0} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}_1} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}_2}$

例1　已知两直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},\quad l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$$

试证：l_1, l_2为两异面直线，

并求$_1, l_2$间距离与它们的公垂线方程

例2　求过点P(1,1,1)且与直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3},\quad l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程