# §1.9 向量的混合积

## 一、定义

设已知三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为这三个向量的**混合积**，记为$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，　$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，

$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，

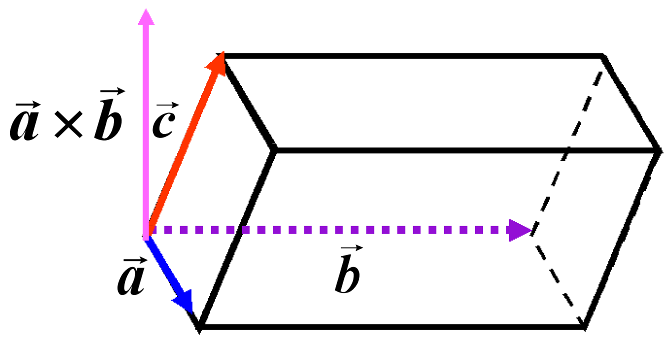
$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

混合积的坐标表达式

## 二、关于混合积的说明：

**（1）向量混合积的几何意义：**

向量的混合积 $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,)=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是一个数，它的绝对值表示以向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积.




**（2）混合积的因子轮换定理**

(2) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

**（3）三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面** $\Longleftrightarrow$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0.$

**例1** 已知 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=2$，

计算 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

**解** $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=4.$$

**例 2** 已知空间内不在一平面上的四点

$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$、

$D(x_4,y_4,z_4)$，求四面体的体积.

**解** 由立体几何知，四面体的体积等于以向量$\overrightarrow{AB}$、

$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD})\right| \quad \because\ \overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

$$AC=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\} \quad \overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1\}$$

$$\therefore V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

小节：

混合积的定义

混合积的坐标表达

混合积的几何意义

混合积的因子轮换定理

三向量共面的充要条件

作业：

P58：第1（2）、4（2）题