§2.2　曲面的方程

一. 曲面的方程

空间曲面方程的意义和平面曲线的方程是一样的，那就是在空间建立坐标系之后，把曲面（作为点的轨迹）上的点的特征性质，用点的坐标x, y与z 之间关系式来表达，一般是用方程

$$F(x,y,z)=0(1) \text{ 或 } \quad z=f(x,y)(2)$$

反过来，每一个形如（1）和（2）的方程通常表示空间的一个曲面.

$$F(x,y,z)=0(1) \qquad z=f(x,y)(2)$$

- 定义2.2.1　如果一个方程（1）和（2）与一个曲面有着关系：

①满足方程（1）和（2）的 (x, y, z) 是曲面上的点的坐标;

②曲面上的任何一点的坐标满足方程（1）和（2），那么方程（1）和（2）就叫做曲面方程，而曲面叫做方程（1）和（2）的图形.

例1 求连结两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,1,4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

球面

定义：与定点距离是定长的空间点的轨迹叫做球面，这个定点叫做球心，定长叫做半径.

1.球心在原点，半径为r的球面方程：

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

2.球心在点C（a,b,c），半径为r的球面方程：

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

展开，即：

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

特点： 此即一个三元二次方程，平方项系数相等，坐标乘积项消失.

二、曲面的参数方程

$$r = r(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{e_1} + y(u,v)\overrightarrow{e_2} + z(u,v)\overrightarrow{e_3} \quad (2.2-5)$$

定义2.2.2: 如果 $u,v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的一切可能取的值，由(2.2—5)表示的径矢$r(u,v)$的终点M总在一个曲面上；反过来，在这个曲面上的任意点M总对应着以它为终点的径矢，而这径矢可由 $u,v(a \le u \le b, c \le v \le d)$ 的值通过(2.2—5)完全决定，那么我们就把表达式(2.2—5)叫做曲面的矢量式参数方程，其中u, v为参数.

$$r = r(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{e_1} + y(u,v)\overrightarrow{e_2} + z(u,v)\overrightarrow{e_3} \quad (2.2-5)$$

曲面的参数方程也常写成：

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (2.2-6)$$

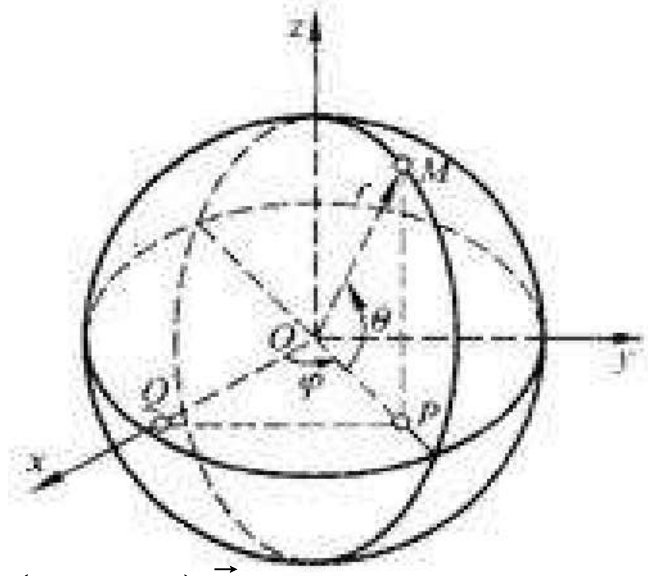
表达式（2.2−6）叫做曲面的坐标式参数方程.

在直角坐标系中，曲面的矢量式参数方程为：

$$r = r(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad (2.2-5')$$

例1 求中心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

解：如图，设 M 是球面上任意一点， M 在 xoy 面上的射影为 P，P 在 x 轴上的射影为 Q，有向角 $\measuredangle\left(\vec{i},\overrightarrow{OP}\right)=\phi$，$\angle POM=\theta$（$M$ 在 xoy 面上方时 θ 为正，否则为负），则有：



$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{PM}=\left(r\sin\theta\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{QP}=\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\phi\right)\vec{j}=\left(r\cos\theta\sin\phi\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\phi\right)\vec{i}=\left(r\cos\theta\cos\phi\right)\vec{i}$$

则 $:\vec{r}=\left(r\cos\theta\cos\phi\right)\vec{i}+\left(r\cos\theta\sin\phi\right)\vec{j}+\left(r\sin\theta\right)\vec{k}$

例1 求中心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

$$\vec{r} = (r\cos\theta\cos\phi)\vec{i} + (r\cos\theta\sin\phi)\vec{j} + (r\sin\theta)\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \quad \left(-\pi < \phi \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

消 去 参 数 即 可 得 直 角 坐 标 方 程：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

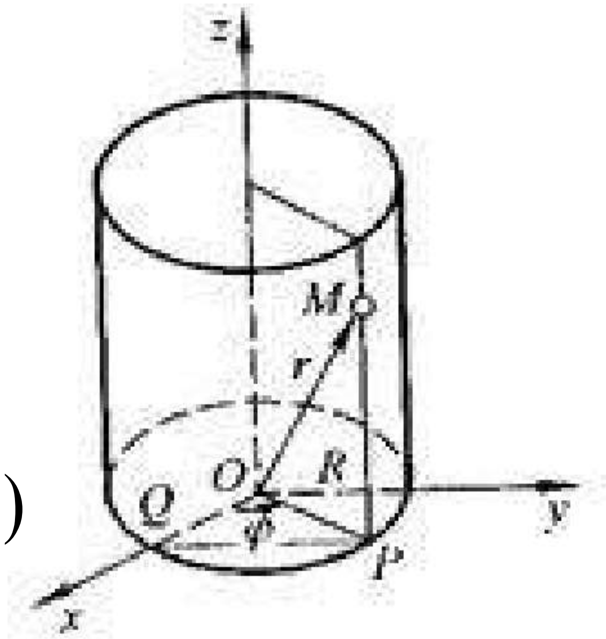
此即地球上的地理坐标，经度是 ϕ 的值，纬度是 θ 的值.

例2 求以z轴为对称轴，半径为 R的圆柱面的参数方程.

解：如图，设M是球面上任意一点，M在xoy面上的射影为P，P在x轴上的射影为Q，有向角$\measuredangle(\vec{i},\overrightarrow{OP})=\phi$，$\angle POM=\theta$（$M$在$xoy$面上方时$\theta$为正，否则为负），则有：

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OQ}=(R\cos\phi)\vec{i},\quad \overrightarrow{QP}=(R\sin\phi)\vec{j},\quad \overrightarrow{PM}=u\vec{k}$$



则：$\vec{r}=(R\cos\phi)\vec{i}+(R\sin\phi)\vec{j}+u\vec{k}$

$$\begin{cases}x=R\cos\phi\\ y=R\sin\phi\quad(-\pi<\phi\le\pi,-\infty\le u\le+\infty)\\ z=u\end{cases}$$

消去参数得：$x^2+y^2=R^2$

小节：

曲面方程的定义
球面方程
曲面的参数方程
球面的参数方程
圆柱面的参数方程

作业：

P92:第2（5）（6），8题