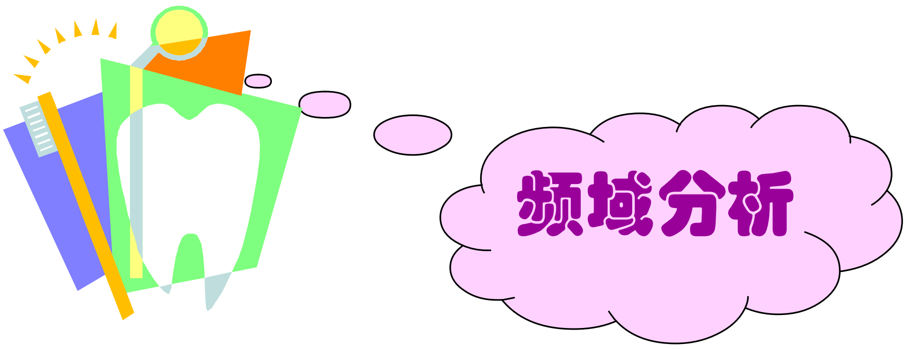
第四章 连续时间傅里叶变换

The Continuous time Fourier Transform



4.4 卷积性质

The Convolution Property

4.4 卷积性质

卷积特性:

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ $\quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$

则 $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$

由于卷积特性的存在，使对**LTI**系统在频域进行分析成为可能。本质上，卷积特性的成立正是因为复指数信号是一切**LTI**系统的特征函数。

由 $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ 表明:

4.4 卷积性质

可将 $x(t)$ 分解成复指数分量的线性组合，每个 $e^{j\omega t}$ 通过**LTI**系统时都要受到系统与 $e^{j\omega t}$ 对应的特征值的加权。这个特征值就是

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

故有

$$y(t)=x(t)*h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

所以 $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$

4.4 卷积性质

由于$h(t)$的傅氏变换$H(j\omega)$就是频率为ω的复指数信号$e^{j\omega t}$通过LTI系统时，系统对输入信号在幅度上产生的影响，所以称为系统的频率响应。

鉴于$h(t)$与$H(j\omega)$是一一对应的，因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。由于并非任何系统的频率响应都存在，因此用频率响应表征系统时，一般都限于对稳定系统。因为，稳定性保证了 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty$

LTI系统的频域分析法

根据卷积特性,可以对LTI系统进行频域分析，其过程为:

1. 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
2. 根据系统的描述，求出 $H(j\omega)$
3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
4. $y(t) = \mathrm{F}^{-1}[Y(j\omega)]$

4.5 相乘性质

The Multiplication Property

4.5 相乘性质

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ $\quad$ $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

利用对偶性可以从卷积性质得出相乘性质

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \qquad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$X_1(jt) \leftrightarrow 2\pi x_1(-\omega) \qquad X_2(jt) \leftrightarrow 2\pi x_2(-\omega)$$

$$X_1(jt) * X_2(jt) \leftrightarrow 4\pi^2 x_1(-\omega) x_2(-\omega)$$

4.5 相乘性质

$$4\pi^2 x_1(-t)\cdot x_2(-t) \leftrightarrow 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

$$\therefore \quad x_1(t)\cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

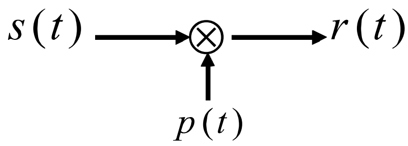
两个信号在时域相乘，可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度，这就是幅度调制。其中一个信号称为载波，另一个是调制信号。

例1: $\because \; x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \qquad e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

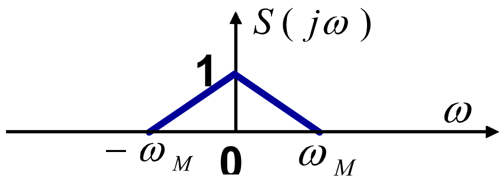
$$\therefore \; x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)]$$ ——移频性质

4.5 相乘性质

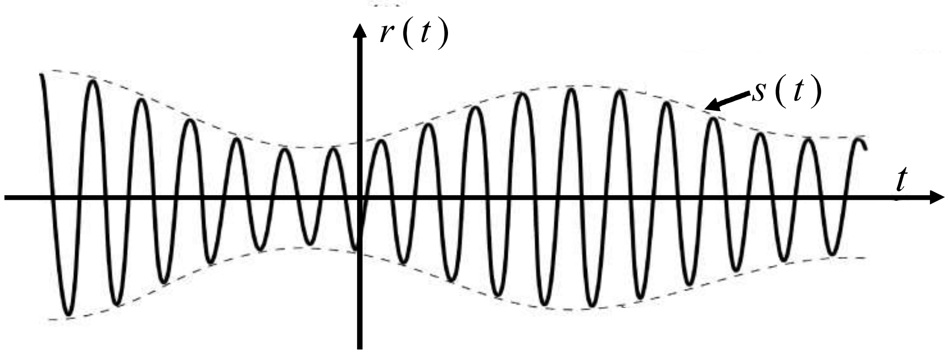
例2. 正弦幅度调制:



$s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad p(t) = \cos\omega_0 t$

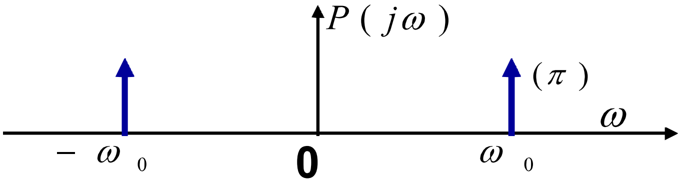


$r(t) = s(t)\,p(t)$



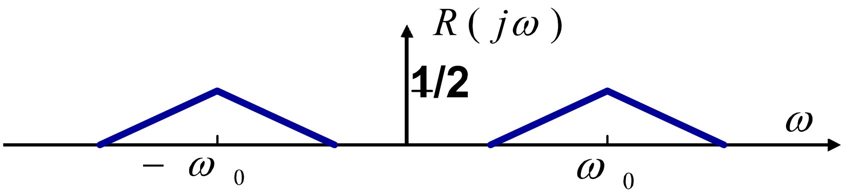
4.5 相乘性质

$$P(j\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$



$$R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}S(j\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2}S[j(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2}S[j(\omega+\omega_0)]$$



Matlab仿真演示

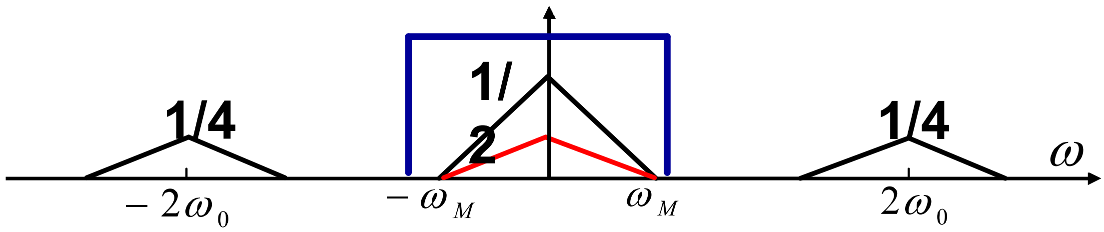
4.5 相乘性质

正弦幅度调制等效于在频域将调制信号的频谱搬移到载频位置。

例**3.** 同步解调:

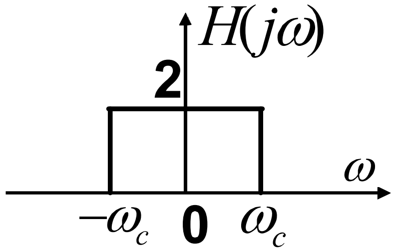
$$r(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}R(j\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}S(j\omega)+\frac{1}{4}S[j(\omega-2\omega_0)]+\frac{1}{4}S[j(\omega+2\omega_0)]$$



4.5 相乘性质

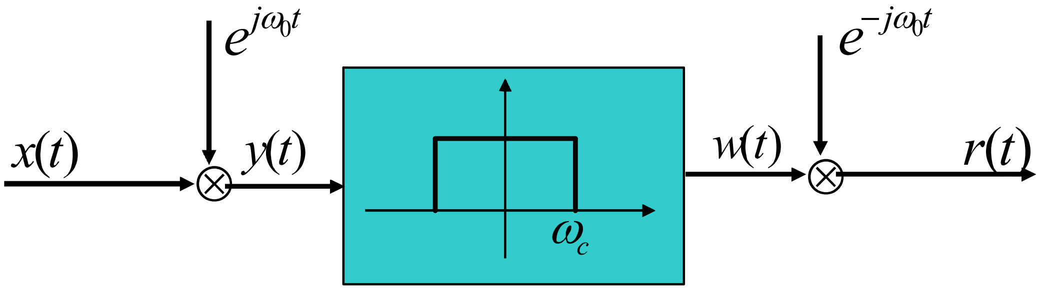
此时，用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的系统即可从 $r(t)$ 恢复出 $s(t)$。

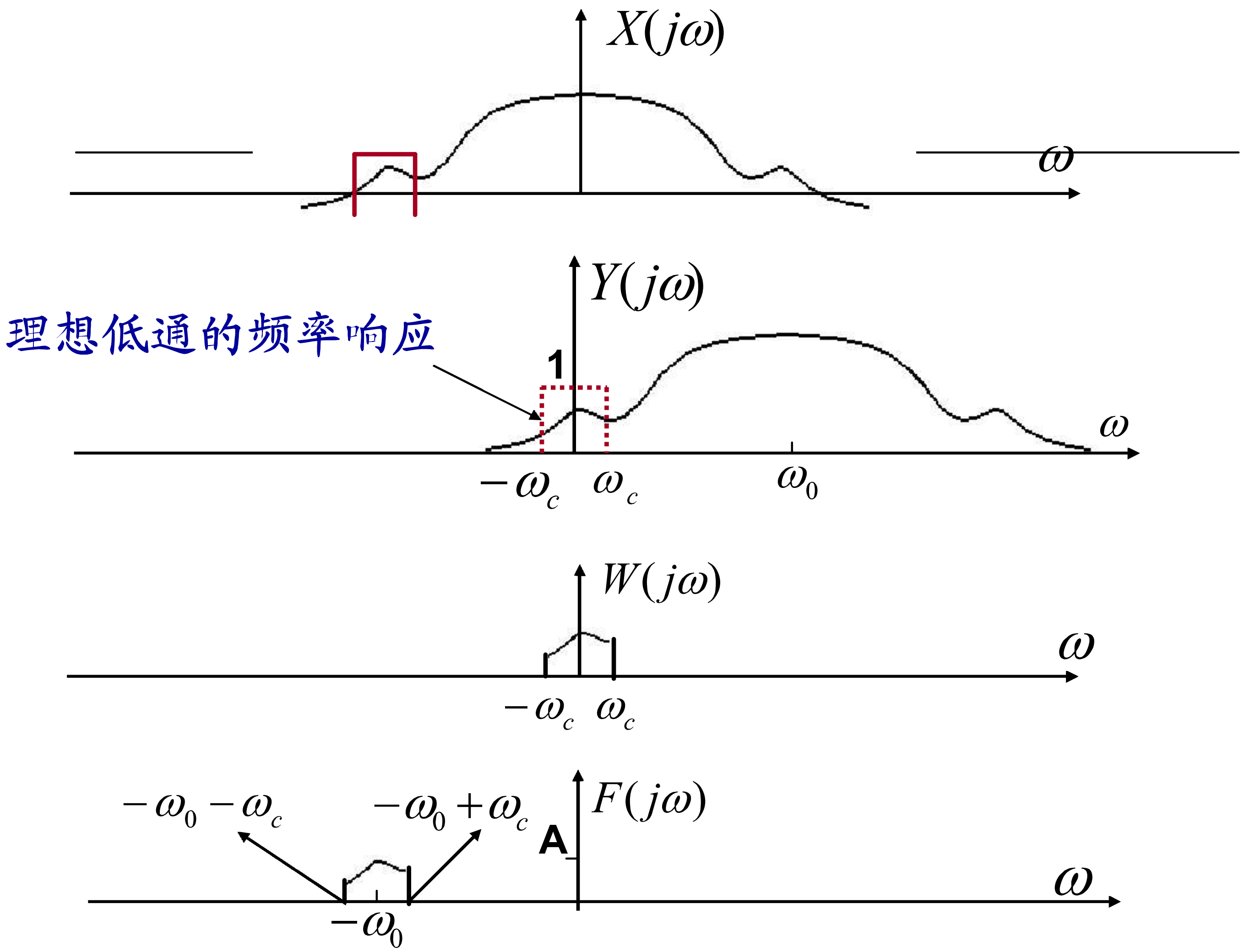


只要 $\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M$ 即可。

具有此频率特性的LTI系统称为理想低通滤波器。

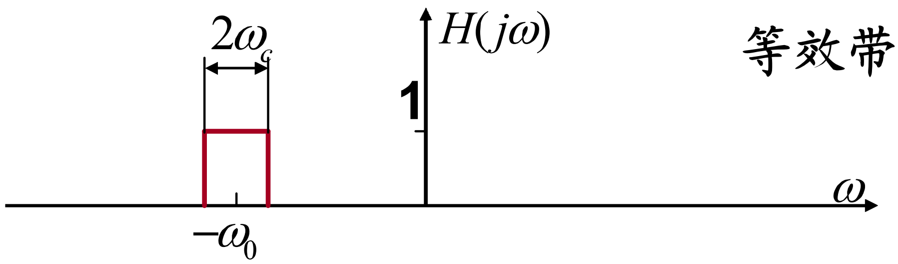
例4. 中心频率可变的带通滤波器：





$X(j\omega)$
ω
$Y(j\omega)$
理想低通的频率响应
1
ω
$-\omega_c$
ω_c
ω_0
$W(j\omega)$
ω
$-\omega_c$
ω_c
$-\omega_0-\omega_c$
$-\omega_0+\omega_c$
$F(j\omega)$
A
ω
$-\omega_0$

4.5 相乘性质



等效带通滤波器

相当于从$X(j\omega)$中直接用一个带通滤波器滤出的频谱。表明整个系统相当于一个中心频率为ω_0的带通滤波器，改变ω_0即可实现中心频率可变。