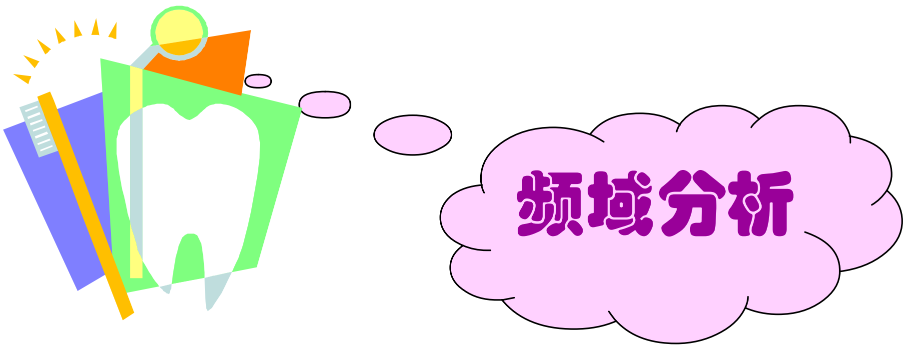
第四章 连续时间傅里叶变换

The Continuous time Fourier Transform



4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Differential Equations

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

工程实际中有相当广泛的LTI系统其输入输出关系可以由一个线性常系数微分方程描述。一般形式的LCCDE是:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

一. 由LCCDE描述的LTI系统的频率特性

由于$e^{j\omega t}$是一切**LTI**系统的特征函数，因此，当系统的输入为$x(t)=e^{j\omega t}$时，系统所产生的响应就是$y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$。表明在 $x(t)=e^{j\omega t}$的情况下，求解**LCCDE**即可得到 $H(j\omega)$ 。但是这种方法太麻烦，很少使用。

一. 由LCCDE描述的LTI系统的频率特性

对LCCDE两边进行傅立叶变换有:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

由于 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

一. 由LCCDE描述的LTI系统的频率特性

可见由LCCDE描述的LTI 系统其频率特性是一个有理函数。由此可以看出，对由 LCCDE 描述的LTI系统，当需要求得其$H(j\omega)$时(比如时域分析时)，往往是由 $h(t)$ 做反变换得到。

对有理函数求傅立叶反变换通常采用部分分式展开和利用常用变换对进行。

二. 频率响应的求法

1. 用微分方程表征的系统

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

二. 频率响应的求法

例： $$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+6\frac{dy(t)}{dt}+8y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega+3}{(j\omega)^2+6(j\omega)+8}=\frac{j\omega+3}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{4+j\omega}]$$

$$h(t)=\frac{1}{2}[e^{-2t}+e^{-4t}]u(t)$$

可见，对由微分方程所描述的系统通过求频率响应可以方便地求出其单位冲激响应。

4.8 小结 Summary

1. 通过连续时间傅立叶变换，建立了将连续时间信号(包括周期、非周期信号)分解为复指数信号分量的线性组合的方法。

2. 通过讨论傅立叶变换的性质，揭示了信号时域特性与频域特性的关系。卷积特性是LTI系统频域分析方法的理论基础，相乘特性则是通信和信号传输领域各种调制解调技术的理论基础。

4.8 小结 Summary

3. 对LTI系统建立了频域分析的方法。

4. 对由LCCDE描述的LTI系统，可以很方便地由LCCDE或系统框图得到其 $H(j\omega)$ 。

5. 稳定的LTI系统可以通过其频率响应来描述。