# 第七节 用配方法化二次型为标准型

7

# 一、拉格朗日配方法的具体步骤

用正交变换化二次型为标准形，其特点是**保持几何形状不变**.

**问题** 有没有其它方法，也可以把二次型化为标准形？

问题的回答是肯定的。下面介绍一种行之有效的方法——**拉格朗日配方法**.

## 拉格朗日配方法的步骤

**1.** 若二次型含有$x_i$的平方项，则先把含有$x_i$的乘积项集中，然后配方，再对其余的变量同样进行，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，就得到标准形;

**2.** 若二次型中不含有平方项，但是$a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$,则先作可逆线性变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ \quad x_k = y_k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i, j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方.

**例1** 化二次型

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形,并求所用的变换矩阵.

**解**

含有平方项

含有 $x_1$ 的项配方

$$f = \boxed{x_1^2} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

去掉配方后多出来的项

$$\boxed{-x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3} + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+x_2^2+4x_3^2+4x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_2+2x_3\right)^2.$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$= y_1^2 + y_2^2.$$

所用变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(|C| = 1 \neq 0\right).$$

**例2** 化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

成标准形,并求所用的变换矩阵.

**解** 由于所给二次型中无平方项，所以

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ $\left( \text{即} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

代入 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3,$

得 $$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$$

再配方，得

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases} \quad \left( 即 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$

得 $\quad f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$

所用变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}. \quad \left(|C|=-2\neq 0\right).$$

得标准形

$$f=z_1^2-z_2^2-z_3^2,$$

所用可逆线性变换为

$$\begin{cases} x_1=z_1-z_2-z_3, \\ x_2=z_1+z_2-z_3, \\ x_3=z_3. \end{cases}$$