

文章编号: 1000-4750(2017)02-0137-08

基于尾流振子模型的桥梁节段至 实桥涡激共振振幅转换关系

许 坤, 葛耀君

(同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 该文基于一种用于涡振模拟的两自由度经验模型(尾流振子模型)推导了桥梁节段至实桥涡振振幅转换关系。首先介绍了尾流振子模型的形式及其特点, 其次从展向全相关及展向不完全相关两方面推导了节段至实桥涡振振幅转换关系, 最后结合实际桥梁对上述过程进行了算例验证, 并与现场实测结果进行了比较。研究表明: 当不考虑涡激力展向相关性影响时, 节段至实桥涡振振幅只与结构振型函数有关, 尾流振子模型得到的转换关系与传统经验非线性模型得到的转换关系相同; 当考虑涡激力展向相关性时, 计算得到的实桥涡振振幅可能小于节段模型结果, 涡激力展向全相关条件下得到的计算结果与现场实测结果更接近。因此, 当缺少精确的涡激力展向相干函数时, 假定涡激力展向全相关计算得到的实桥涡振振幅可能更为可靠。

关键词: 涡激振动; 尾流振子模型; 节段模型; 实桥; 振幅转换

中图分类号: U441.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.07.0588

CONVERSION OF THE VORTEX-INDUCED AMPLITUDES OF SECTIONAL MODELS TO FULL-SCALE BRIDGES BASED ON WAKE OSCILLATOR MODEL

XU Kun, GE Yao-jun

(State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The approach for converting the VIV amplitudes of sectional models to full-scale bridges base on a two-degree-of-freedom empirical model (wake oscillator model) is established in this paper. The wake oscillator model to be used in this paper is firstly introduced. The conversion method by involving fully correlated and non-fully correlated cases are then derived based on this model. A real bridge is utilized as a case study, and the calculated results are compared with those of field measurements. Results indicate that once the span-wise correlation of VIV forces is ignored, the conversion of VIV amplitudes between sectional models and full-scale bridges, generated by wake oscillator model, equals to the result generated by the traditional nonlinear semi-empirical model. However, once the span-wise correlation of VIV forces is considered, the calculated VIV amplitudes of real bridges may be smaller than the results of sectional model tests. The calculated results by ignoring the span-wise correlation of VIV forces agree well with those of field measurements. Thus, the calculation of VIV amplitudes of a full-scale bridge by ignoring the span-wise correlation of VIV forces may be more reliable in the case of lacking an accurate spatial coherence function of VIV forces.

Key words: vortex-induced vibration; wake oscillator model; sectional models; full-scale bridges; amplitude conversion

收稿日期: 2015-07-19; 修改日期: 2016-03-09

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2013CB036300); 国家自然科学基金重点项目(51323013)

通讯作者: 葛耀君(1958—), 男, 上海人, 教授, 工学博士, 博导, 从事桥梁与结构抗风研究(E-mail: yaojunge@tongji.edu.cn).

作者简介: 许 坤(1988—), 男, 山东人, 博士生, 从事桥梁与结构抗风研究(E-mail: xukun_tj@163.com).

目前而言,结构涡振性能研究仍需依赖物理风洞试验。物理风洞试验包括弹性悬挂节段模型试验和全桥气弹模型试验,其中最为直观的为全桥气弹模型试验。全桥气弹模型不仅可以模拟结构质量及刚度,还可以考虑振型参与、气动力展向相关性等三维效应,是研究大跨度桥梁各阶涡振特性的重要手段。然而全桥气弹模型缩尺比小,较难模拟栏杆等细部构件,由于雷诺数、细部构件等影响,多数情况下获得的全桥气弹模型涡振特性与实际结构或节段模型结果有较大差别。弹性悬挂节段模型通过模拟结构某一阶模态质量及刚度可有效确定该模态涡振风速范围及涡振振幅,是结构涡振性能研究的主要手段。然而实际桥梁为三维结构,结构响应需考虑振型及涡激力展向相关性影响,基于刚体节段模型获得的结果需借助某些手段换算至实际结构响应。由于经验模型形式简单,在其基础上可较容易地考虑结构振型及涡激力展向相关性影响,因此现有研究仍较多采用经验模型。

自 Bishop 和 Hassan^[1]以来,描述结构涡激振动的经验模型可大致分为两类:两自由度模型^[2-5]和单自由度模型^[6-9]。其中桥梁涡振研究较多采用单自由度经验模型。Ehsan 和 Scanlan 等^[10]最先基于经验非线性模型考虑了涡激力展向相关性影响,并给出了两种考虑涡激力展向相关性影响的实桥涡振计算方法。朱乐东^[11]基于经验线性模型推导了涡振试验节段模型质量模拟方法,并建立了节段模型与实桥涡振振幅转换关系;张志田等^[12]系统性地研究了三类单自由度经验模型(经验线性模型、经验非线性模型、以及改进经验非线性模型)特点,并提出了不同经验模型下节段与实桥涡振振幅换算方法,张志田的研究表明,节段模型与实桥涡振振幅换算关系受振型及研究采用的涡振模型影响;Sun 等^[13]基于经验非线性模型通过引入振型自卷积分的方式重新定义了涡激力展向相关性折减系数,并给出了相应节段至实桥涡振振幅计算方法。

上述研究都是基于单自由度经验模型展开,单自由度经验模型形式简单,可较容易地识别模型参数。然而单自由度经验模型仅能描述某一风速条件下结构自限幅振动特性,无法描述整个锁定区涡振特性。两自由度模型能较好模拟“频率锁定”、“振幅分支”等试验现象,相较单自由度模型,两自由度模型更具一定物理意义。然而传统两自由度模型参数识别需借助复杂强迫振动试验工况,这一定程

度上限制了该模型的应用。Xu 等^[14]系统性地研究了两自由度经验模型特点并提出了基于弹性悬挂节段模型试验的参数识别方法,该方法极大简化了两自由度模型参数识别过程,使其可较容易地应用于实际结构涡振研究。

本文基于两自由度经验模型推导考虑振型及涡激力展向相关性影响的节段至实桥涡振振幅转换方法。本研究可作为现有节段至实桥涡振振幅转换方法的进一步补充。由于本研究基于两自由度经验模型,通过与现有方法比较,可进一步明确涡振模拟所用经验模型对节段与实桥涡振振幅转换关系的影响。本文内容安排如下:第1部分简单介绍本文所用两自由度经验模型形式;第2部分推导实桥涡振运动方程;第3部分从展向全相关和不完全相关两个方面推导节段至实桥振幅转换方法;第4部分基于某一实际桥梁对上述方法进行验证,并与现场实测结果进行比较;第5部分给出相应研究结论。

1 两自由度经验模型

顾名思义,两自由度经验模型包含两个运动方程:结构方程和流体方程。其中结构方程为传统线性形式,而流体方程一般假设为某一非线性振子形式。以竖向运动为例,如图1所示,作用在结构上的竖向力可以表示为:

$$F_y = \frac{1}{2} \rho (U^2 + \dot{y}^2) DC_D (\alpha + \beta) \sin \beta + \frac{1}{2} \rho (U^2 + \dot{y}^2) DC_L (\alpha + \beta) \cos \beta \quad (1)$$

其中: α 为平均风 U 与主梁轴线间的夹角; $\beta = \arctan(\dot{y}/U)$,表示结构运动速度 \dot{y} 引起的风攻角瞬时变化量; ρ 为空气密度; D 为断面高度; C_D 、 C_L 分别为阻力及升力系数。

对阻力和升力系数在静风攻角 α 附近进行泰勒级数展开,并忽略高阶项,然后再将 $\beta = \arctan(\dot{y}/U)$ 代入式(1),并关于 \dot{y} 进行泰勒级数展开,可得到如下形式的竖向力表达式^[15]:

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 DC_L (\alpha) + \frac{1}{2} \rho U^2 D [C_D (\alpha) + C'_L (\alpha)] \frac{\dot{y}}{U} + O[\dot{y}^2] \quad (2)$$

其中, C'_L 表示升力系数 C_L 关于风攻角的导数。

作用于结构表面的气动力可以分成平均项和脉动项,因此,式(2)可以写成:

$$F_y = \frac{1}{2} \rho U^2 D \bar{C}_L(\alpha) + \frac{1}{2} \rho U^2 D \tilde{C}_L(\alpha) + \frac{1}{2} \rho U^2 D [\bar{C}_D(\alpha) + \tilde{C}_D(\alpha) + \bar{C}'_L(\alpha) + \tilde{C}'_L(\alpha)] \frac{\dot{y}}{U} + O[y]^2 \quad (3)$$

其中, $\bar{C}_{L,D}$ 和 $\tilde{C}_{L,D}$ 分别表示气动力中的平均项和脉动项。

当以静力变形后的位置为原点时, 作用于结构上的气动力只需考虑脉动项, 可以表示为:

$$\tilde{F}_y = \frac{1}{2} \rho U^2 D \tilde{C}_L(\alpha) + \frac{1}{2} \rho U^2 D [\tilde{C}_D(\alpha) + \tilde{C}'_L(\alpha) + \tilde{C}'_D(\alpha)] \frac{\dot{y}}{U} + O[y]^2 \quad (4)$$

对于某些钝体断面如桥梁断面而言, 一般需考虑流场的非定常效应, 忽略高阶项后, 式(4)可表示为:

$$\tilde{F}_y = \frac{1}{2} \rho U^2 D \tilde{C}_L + \frac{1}{2} \rho U^2 D H_1^* \frac{\dot{y}}{U} \quad (5)$$

此时, 结构运动方程为:

$$m(\ddot{y} + 2\xi_n \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y) = \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(\tilde{C}_L + H_1^* \frac{\dot{y}}{U} \right) \quad (6)$$

其中: m 为结构单位长度质量; ξ_n 为结构机械阻尼比; ω_n 为结构特征频率; y 为偏离静力平衡位置的结构位移; U 为来流平均风速; \tilde{C}_L 为脱落漩涡引起的脉动作用; H_1^* 项为待确定参数, 表示流场“拖拽(stall)”效应, 在整个锁定区内假设为常数。

流体方程一般采用传统 Van der Pol 形式^[3]:

$$\ddot{C}_L - \omega_s G \tilde{C}_{L0}^2 \dot{C}_L + 4\omega_s G \tilde{C}_L^2 \dot{C}_L + \omega_s^2 \tilde{C}_L = P \dot{y} \quad (7)$$

其中: $\omega_s = 2\pi S_t U / D$ 为斯特罗哈频率; S_t 为断面斯特罗哈数; \tilde{C}_{L0} 为结构静止时所受升力系数中脉动部分的幅值; G 和 P 为待确定参数。

引入无量纲位移 $Y = y / D$ 及无量纲时间 $\tau = \omega_n t$, 联合结构方程和流体方程, 可获得描述结构涡激振动的无量纲运动方程:

$$\begin{cases} Y'' + 2\xi_n Y' + Y = \frac{\rho U^2}{2m\omega_n^2} \left(\tilde{C}_L + \frac{D\omega_n H_1^*}{U} Y' \right) \\ \tilde{C}_L'' - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 \tilde{C}_L' + 4\delta G \tilde{C}_L^2 \tilde{C}_L' + \delta^2 \tilde{C}_L = P Y' \end{cases} \quad (8)$$

其中: $\delta = \omega_s / \omega_n = 2\pi S_t \cdot U_*$, 为斯特罗哈频率与结构特征频率比; $U_* = U / (\omega_n \cdot D)$ 为约化风速。由于结构斯特罗哈数为常数, δ 与约化风速 U_* 成正比, 可将其看作与来流风速有关的变量。 H_1^* 、 G

及 P 需要通过试验确定。

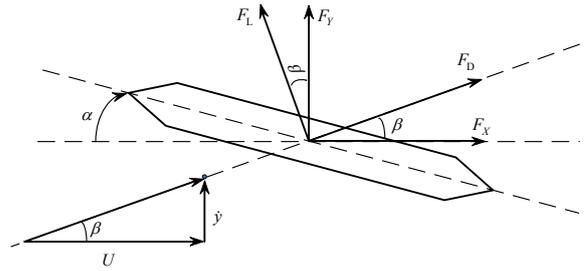


图1 结构竖向运动示意图

Fig.1 Schematic diagram of structure vertical vibration

2 实桥涡振运动方程

已有健康监测资料表明, 实际结构涡振发生时为单模态运动^[16-18]。经历单模态运动的结构, 其展向任意位置处的竖向位移可表示为:

$$y(x, \tau) = \phi_i(x) D \eta(\tau) \quad (9)$$

其中: x 为展向位置; $\phi_i(x)$ 为主梁第 i 阶振型函数; $\eta(\tau)$ 为按主梁高度约化的无量纲广义坐标。

引入上述关系后, 可得到主梁运动方程:

$$\bar{m} \omega_{ni}^2 [\eta''(\tau) + 2\xi_i \eta'(\tau) + \eta(\tau)] \phi_i(x) = \frac{\rho U^2}{2} \left[\tilde{C}_L(x, \tau) + \frac{\omega_{ni} D}{U} \eta'(\tau) H_1^*(x) \phi_i(x) \right] \quad (10)$$

其中: ξ_i 为第 i 阶模态的模态阻尼比; ω_{ni} 为第 i 阶模态的特征频率; $\bar{m} = 1 / \int_0^L \bar{\varphi}_i^2(x) dx$ 为主梁单位长度等效质量, 其中 $\bar{\varphi}_i$ 为按质量归一化后结构振型函数中的主梁部分。

结构展向任意位置处的流场方程可表示为:

$$C_L''(x, \tau) - \delta G C_{L0}^2 C_L'(x, \tau) + 4\delta G C_L^2(x, \tau) \cdot C_L'(x, \tau) + \delta^2 C_L(x, \tau) = P \phi_i(x) \eta'(\tau) \quad (11)$$

Skop 等^[19]基于试验研究发现, 脱落漩涡沿展向分布规律与结构振型函数 $\phi_i(x)$ 近似。当流场为二维(片条假设)时, 结构某一片条所受流场作用仅与该片条运动状态有关, 此时流场作用沿展向分布规律可近似用结构振型函数表示。

然而实际流场为三维, 流场作用沿展向分布规律与结构振型函数有偏差。当基于二维假设将流场作用沿展向分布规律用振型函数近似表示时, 需通过在结构方程式(10)的右端引入 1 个与空间位置有关的修正函数 $g(x)$ 来修正流场三维效应引起的涡激力在展向 x 位置处的偏差。此时, 模态坐标下结构运动方程可表示为:

$$\begin{cases} \eta''(\tau) + 2\xi\eta'(\tau) + \eta(\tau) = \frac{\rho U^2}{2\bar{m}\omega_n^2 \int_0^L \phi_i^2(x) dx} F(\tau) \\ Q_i''(\tau) - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 Q_i'(\tau) + \\ 4\delta G Q_i^2(\tau) Q_i'(\tau) \frac{\int_0^L \phi_i^4(x) dx}{\int_0^L \phi_i^2(x) dx} + \delta^2 Q_i(\tau) = P\eta'(\tau) \end{cases} \quad (12)$$

式中: $Q_i(\tau)$ 为广义坐标 $\eta(\tau)$ 处对应的脱落漩涡作用; $F(\tau)$ 为广义涡激力, 具有如下形式:

$$F(\tau) = \int_0^L f(x, \tau) \phi_i(x) dx \quad (13)$$

其中, $f(x, \tau)$ 为展向任意位置 x 处所受涡激力:

$$f(x, \tau) = \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right] \phi_i(x) g(x) \quad (14)$$

式中: H_1^* 为二维参数; 中括号内的两项为广义坐标 $\eta(\tau)$ 处所受涡激力; $g(x)$ 为修正函数, 用来考虑三维流场条件下将涡激力沿展向分布规律假设为结构振型函数后在位置 x 处引起的偏差。

对结构运动方程进一步变换, 根据式(13), 广义力 $F(\tau)$ 可写成如下格式:

$$F(\tau) = \left[\int_0^L \int_0^L f(x_1, \tau) f(x_2, \tau) \phi_i(x_1) \phi_i(x_2) dx_1 dx_2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

将式(14)代入式(15)后可得到:

$$F(\tau) = \left\{ \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right]^2 \int_0^L \int_0^L R(x_1, x_2) \phi_i^2(x_1) \phi_i^2(x_2) dx_1 dx_2 \right\}^{1/2} \quad (16)$$

式中, $R(x_1, x_2) = g(x_1)g(x_2)$, 表示三维流场条件下主梁展向两断面间涡激力的不完全相关特性。

将第一项移到根号外, 可以得到:

$$F(\tau) = \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right] \times \sqrt{\int_0^L \int_0^L R(x_1, x_2) \phi_i^2(x_1) \phi_i^2(x_2) dx_1 dx_2} \quad (17)$$

此时, 结构所受广义力变成二维条件下的广义力乘以折减系数, 该折减系数需通过二重积分获得。

Wilkinson 等^[20]研究表明: 结构展向两断面 x_1 、 x_2 间涡激力相关性仅与断面间距 $\Delta x = |x_1 - x_2|$ 有关, 因此式(17)可表示为:

$$F(\tau) = \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right] \times$$

$$\sqrt{\int_0^L \int_0^L R(|x_1 - x_2|) \phi_i^2(x_1) \phi_i^2(x_2) dx_1 dx_2} \quad (18)$$

引入两个新的变量: $\Delta x = x_2 - x_1$ 以及 $x = x_1$, 根据二重积分换元法则变换积分项, 可得到用变量 Δx 和 x 表示的广义力:

$$F(\tau) = \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right] \times \sqrt{\int_{-L}^L \int_0^{L-\Delta x} R(|\Delta x|) \phi_i^2(x) \phi_i^2(x + \Delta x) dx d\Delta x} \quad (19)$$

由于结构展向间距 Δx 为正值, 因此式(19)可进一步写为:

$$F(\tau) = \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right] \times \sqrt{2 \int_0^L \int_0^{L-\Delta x} R(\Delta x) \phi_i^2(x) \phi_i^2(x + \Delta x) dx d\Delta x} \quad (20)$$

式中, $R(\Delta x)$ 即展向间距为 Δx 的两断面涡激力展向相干函数。

可以发现: 经过上述积分项变换, 将原来与展向位置有关的广义力转换成了与展向间距 Δx 有关的广义力。由于试验测得的展向相干函数与展向间距 Δx 有关, 现有形式将更便于实际应用。最终得到的实桥涡振运动方程为:

$$\begin{cases} \eta''(\tau) + 2\xi\eta'(\tau) + \eta(\tau) = \frac{\rho U^2}{2\omega_{ni}^2 \bar{m} \int_0^L \phi_i^2(x) dx} \cdot \\ \left[Q_i(\tau) + \frac{\omega_{ni} DH_1^*}{U} \eta'(\tau) \right] \Phi \\ Q_i''(\tau) - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 Q_i'(\tau) + 4\delta G Q_i^2(\tau) Q_i'(\tau) \cdot \\ \frac{\int_0^L \phi_i^4(x) dx}{\int_0^L \phi_i^2(x) dx} + \delta^2 Q_i(\tau) = P\eta'(\tau) \end{cases} \quad (21)$$

其中:

$$\Phi = \sqrt{2 \int_0^L \int_0^{L-\Delta x} R(\Delta x) \phi_i^2(x) \phi_i^2(x + \Delta x) dx d\Delta x} \quad (22)$$

为使式(21)形式上更简洁, 引入两个新的符号:

$$\bar{M} = \rho D^2 / (8\pi^2 S_t^2 \bar{m}),$$

$$\Gamma = \int_0^L \phi_i^4(x) dx / \int_0^L \phi_i^2(x) dx。$$

式(21)可以写成:

$$\begin{cases} \eta''(\tau) + 2\xi\eta'(\tau) + \eta(\tau) = \\ \frac{\bar{M}\Phi}{\int_0^L \phi_i^2(x) dx} [\delta^2 Q_i(\tau) + 2\pi S_t \delta H_1^* \eta'(\tau)] \\ Q_i''(\tau) - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 Q_i'(\tau) + \\ 4\delta G Q_i^2(\tau) Q_i'(\tau) \Gamma + \delta^2 Q_i(\tau) = P\eta'(\tau) \end{cases} \quad (23)$$

其他符号与前文定义一致。

3 节段至实桥涡振振幅转换关系

根据第 2 节得到的实桥涡振运动方程, 本节从展向全相关与展向不完全相关两个方面推导节段至实桥涡振振幅转换关系。

3.1 展向全相关

当不考虑涡激力展向相关性时, 展向相干函数 $R(\Delta x) = 1$ 。此时, 修正系数 Φ 为:

$$\Phi = \sqrt{2 \int_0^L \int_0^{L-\Delta x} \phi_i^2(x) \phi_i^2(x + \Delta x) dx d\Delta x} \quad (24)$$

对式(24)进行两重积分, 并开根号, 可得到:

$$\Phi = \int_0^L \phi_i^2(x) dx \quad (25)$$

将式(25)代入式(23), 可得到如下方程:

$$\begin{cases} \eta''(\tau) + 2\xi_i \eta'(\tau) + \eta(\tau) = \bar{M}[\delta^2 Q_i(\tau) + 2\pi S_i \delta H_1^* \eta'(\tau)] \\ Q_i''(\tau) - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 Q_i'(\tau) + \\ 4\delta G Q_i^2(\tau) Q_i'(\tau) \Gamma + \delta^2 Q_i(\tau) = P \eta'(\tau) \end{cases} \quad (26)$$

由于是二维假设, 节段模型振幅与长度无关, 可将节段模型看作与实桥长度一致、振型函数 $\phi_i(x) = 1$ 的结构。根据式(23)可得到节段模型运动方程:

$$\begin{cases} Y_s''(\tau) + 2\xi_s Y_s'(\tau) + Y_s(\tau) = \\ \bar{M}[\delta^2 Q_s(\tau) + 2\pi S_s \delta H_1^* Y_s'(\tau)] \\ Q_s''(\tau) - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 Q_s'(\tau) + 4\delta G Q_s^2(\tau) Q_s'(\tau) + \\ \delta^2 Q_s(\tau) = P Y_s'(\tau) \end{cases} \quad (27)$$

比较式(26)和式(27), 可得到如下关系:

$$\begin{cases} \eta(\tau) = Y_s(\tau) / \sqrt{\Gamma} = Y_s(\tau) \sqrt{\frac{\int_0^L \phi_i^2(x) dx}{\int_0^L \phi_i^4(x) dx}} \\ Q_i(\tau) = Q_s(\tau) / \sqrt{\Gamma} = Q_s(\tau) \sqrt{\frac{\int_0^L \phi_i^2(x) dx}{\int_0^L \phi_i^4(x) dx}} \end{cases} \quad (28)$$

式中: $\eta(\tau)$ 为实桥无量纲广义坐标; $Y_s(\tau)$ 为节段模型无量纲位移。根据式(28)可得到实桥与节段模型间涡振振幅关系:

$$\frac{A_r}{A_s} = \sqrt{\frac{\int_0^L \phi_i^2(x) dx}{\int_0^L \phi_i^4(x) dx}} \quad (29)$$

其中: A_r 为实桥无量纲广义坐标 $\eta(\tau)$ 的幅值; A_s 为节段模型无量纲位移 $Y_s(\tau)$ 的幅值。

3.2 展向不完全相关

实际流场为三维, 即使结构振型函数 $\phi_i(x) = 1$ 时, 作用于展向各位置处的涡激力也不完全相关。当基于风洞试验获得准确的涡激力展向相关性后, 可在结构运动方程中考虑涡激力展向相关性的影响。此时, 修正系数为:

$$\Phi = \sqrt{2 \int_0^L \int_0^{L-\Delta x} \phi_i^2(x) \phi_i^2(x + \Delta x) dx R(\Delta x) d\Delta x} \quad (30)$$

Scanlan 等^[10]基于 Wilkinson 试验, 将涡激力展向相干函数表示为指数形式:

$$R(\Delta x) = \exp\left[-f_1 \left(\frac{\Delta x}{D}\right)^{f_2}\right] \quad (31)$$

式中: $\Delta x / D$ 为展向两点间无量纲间距; 参数 f_1 、 f_2 与结构振幅有关。

折减系数 Φ 是结构振幅的函数, 考虑折减系数 Φ 影响的结构振幅计算需要通过迭代来实现。每一个迭代步中, 结构涡振振幅可以通过数值方法直接求解式(23)确定。然而数值方法需计算很长时间以达到稳定振动状态, 并且在不同风速和初始条件下结构达到稳定振动状态所需时间不同, 这将导致较大计算量, 且不易于编程实现。为此, 本文基于非线性微分方程近似解析法求解式(23), 获得稳定振动阶段结构涡振振幅控制方程。这样在每一个迭代步中, 可以通过求解该控制方程来确定结构涡振振幅。

为了使方程看起来更为简洁, 在式(23)中引入一个新的符号: $\bar{M}_i = \bar{M} / \int_0^L \phi_i^2(x) dx$ 。此时, 结构运动方程如下所示:

$$\begin{cases} \eta''(\tau) + 2\xi_i \eta'(\tau) + \eta(\tau) = \\ \bar{M}_i \Phi [\delta^2 Q_i(\tau) + 2\pi S_i \delta H_1^* \eta'(\tau)] \\ Q_i''(\tau) - \delta G \tilde{C}_{L0}^2 Q_i'(\tau) + 4\delta G Q_i^2(\tau) Q_i'(\tau) \Gamma + \\ \delta^2 Q_i(\tau) = P \eta'(\tau) \end{cases} \quad (32)$$

对于上述缓慢变化的弱非线性系统而言, 一般可基于 Harmonic Balance 方法假定方程的解符合如下形式^[21]:

$$\begin{cases} \eta(\tau) = A(\tau) \cos[\omega\tau + \theta_1(\tau)] \\ Q_i(\tau) = B(\tau) \cos[\omega\tau + \theta_2(\tau)] \end{cases} \quad (33)$$

以及:

$$\begin{cases} \eta'(\tau) = -\omega A(\tau) \sin[\omega\tau + \theta_1(\tau)] \\ Q_i'(\tau) = -\omega B(\tau) \sin[\omega\tau + \theta_2(\tau)] \end{cases} \quad (34)$$

其中: $A(\tau)$ 、 $B(\tau)$ 分别为随时间缓慢变化的结构位移及涡脱力幅值; ω 为结构振动频率; $\theta_1(\tau)$ 、

$\theta_2(\tau)$ 分别为结构位移及涡脱力的相位。

根据式(33)以及式(34), 可以得到如下方程:

$$\begin{cases} A' \cos[\omega\tau + \theta_1] - A \sin[\omega\tau + \theta_1] \theta_1' = 0 \\ B' \cos[\omega\tau + \theta_2] - B \sin[\omega\tau + \theta_2] \theta_2' = 0 \end{cases} \quad (35)$$

将式(33)及式(34)代入式(32)可以得到另外一组方程:

$$\begin{cases} A' \sin[\omega\tau + \theta_1] \omega + A \cos[\omega\tau + \theta_1] \omega^2 + \\ A \cos[\omega\tau + \theta_1] \theta_1' \omega + (2\xi_1 - 2\pi\bar{M}_i \delta S_i H_1^* \Phi) \cdot \\ A \sin[\omega\tau + \theta_1] \omega - A \cos[\omega\tau + \theta_1] + \\ \bar{M}_i \delta^2 \Phi B \cos[\omega\tau + \theta_2] = 0 \\ B' \sin[\omega\tau + \theta_2] \omega + B \cos[\omega\tau + \theta_2] \omega^2 + \\ B \cos[\omega\tau + \theta_2] \theta_2' \omega - \delta^2 B \cos[\omega\tau + \theta_2] - \\ \delta G \tilde{C}_{L0}^2 B \sin[\omega\tau + \theta_2] \omega + 4\delta G \Gamma B^3 \cdot \\ \cos^2[\omega\tau + \theta_2] \sin[\omega\tau + \theta_2] \omega - \\ P \omega A \sin[\omega\tau + \theta_1] = 0 \end{cases} \quad (36)$$

联立式(35)和式(36), 可得到关于 A' 、 θ_1' 、 B' 以及 θ_2' 的表达式。对上述变量在 1 个振动周期 $T = 2\pi/\omega$ 内取平均, 可以得到:

$$\begin{cases} A' = \frac{(2\pi\bar{M}_i \delta S_i H_1^* \Phi) A}{2\omega} - \frac{\xi_1 A}{\omega} - \frac{\bar{M}_i \delta^2 \Phi}{2\omega^2} B \sin \varphi \\ A \theta_1' = \frac{A}{2\omega^2} - \frac{A}{2} - \frac{\bar{M}_i \delta^2 \Phi}{2\omega^2} B \cos \varphi \\ B' = \frac{PA}{2\omega} \cos \varphi + \frac{\delta G \tilde{C}_{L0}^2 B}{2\omega} - \frac{\delta G \Gamma}{2\omega} B^3 \\ B \theta_2' = \frac{\delta^2 B}{2\omega^2} + \frac{PA}{2\omega} \sin \varphi - \frac{B}{2} \end{cases} \quad (37)$$

其中, $\varphi = \theta_1 - \theta_2$, 表示结构位移与涡脱力间相位差。

进入稳定振动状态后, 可认为上述幅值和相位不再随时间变化, 方程左端项等于零。引入三角公式, 式(37)变为:

$$\begin{cases} \frac{(2\pi\bar{M}_i \delta S_i H_1^* \Phi) A}{2\omega} - \frac{\xi_1 A}{\omega} - \frac{\bar{M}_i \delta^2 \Phi}{2\omega^2} B \sin \varphi = 0 \\ \frac{A}{2\omega^2} - \frac{A}{2} - \frac{\bar{M}_i \delta^2 \Phi}{2\omega^2} B \cos \varphi = 0 \\ \frac{PA}{2\omega} \cos \varphi + \frac{\delta G \tilde{C}_{L0}^2 B}{2\omega} - \frac{\delta G \Gamma}{2\omega} B^3 = 0 \\ \frac{\delta^2 B}{2\omega^2} + \frac{PA}{2\omega} \sin \varphi - \frac{B}{2} = 0 \\ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 1 = 0 \end{cases} \quad (38)$$

上述方程即稳定振动阶段系统控制方程, 求解该控制方程可获得 A 、 B 、 ω 、 $\sin \varphi$ 以及 $\cos \varphi$ 在给定变量 δ 条件下的值。上述方程求解采用数值延拓算法实现。数值延拓算法通过给定 1 个满足方程解的初值, 采用预估校正法通过逐渐增加或减小变量 δ , 以获得不同 δ 条件下的解。本文数值算法采用 MATLAB (R2011b) 工具箱 CL_MATCONT 实现, 该工具箱用于桥梁涡振振幅计算的具体步骤可参见文献[14]。

基于上述方程和数值延拓算法, 可计算得到展向不完全相关条件下实桥广义坐标幅值 A , 计算步骤如下:

- 1) 某一 δ_i 条件下, 给定初始振幅 A_0 (可取节段模型振幅);
- 2) 根据式(30)和式(31)计算折减系数 Φ ;
- 3) 采用数值延拓算法求解方程式(38), 获得 δ_i 条件下的解 A_i ;
- 4) 判断是否满足 $|A_0 - A_i| < Tol$ (Tol 为给定的判定标准, 这里取 0.0005);
- 5) 如果满足则 A_i 即结构广义坐标在 δ_i 条件下的幅值, 否则令 $A_0 = A_i$, 然后重复步骤 2)~步骤 4)。

重复上述过程即可获得不同 δ 条件下的系统振幅值。

值得注意的是, 式(38)中采用的参数 H_1^* 、 G 和 P 是通过节段模型试验获得的。当考虑流场三维效应时, 即使结构振型函数 $\phi_i(x) = 1$, 作用于展向各位置处的涡激力也不完全相关。因此尽管参数 H_1^* 、 G 和 P 代表的意义是二维范畴参数, 实际参数识别所用节段模型响应却是模型长度范围内的平均值。由于风洞试验中节段模型无量纲展向长度相较实际结构小很多, 一般可认为通过节段模型获得的参数为二维(展向全相关)参数, 节段模型的响应即二维响应。

4 算例验证和比较

本节采用实际桥梁断面参数对上述过程进行算例验证和说明。Xu 等^[14]采用节段模型自由振动数据识别了大海带桥断面尾流振子模型参数, 识别得到的参数为: $H_1^* = -1.6648$ 、 $G = 0.5365$ 和 $P = 7.9908$, 具体识别过程可参见文献[14], 节段模型结构参数如表 1 所示。

表 1 节段模型结构参数

Table 1 Parameters of the cross-sectional model

缩尺比	高度 D/mm	宽度 B/mm	长度 L/mm	质量/ (kg/m)	频率 f_n/Hz	阻尼比 $\bar{\zeta}_n/(\%)$
50	88	620	1750	9.096	6.25	0.5

4.1 展向全相关

当假设涡激力展向全相关时, 实桥与节段模型涡振振幅满足式(29)关系, 当结构振型函数为正弦形式时, 节段模型与实桥涡振振幅的对应关系为:

$$\frac{A_t}{A_s} = \frac{\sqrt{\int_0^L \sin^2(n\pi x/L) dx}}{\sqrt{\int_0^L \sin^4(n\pi x/L) dx}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (39)$$

上述结果与文献[12]中基于传统经验非线性模型得到的换算关系一致。

4.2 展向不完全相关

当考虑涡激力展向相关性时, 需按照第 3 节步骤迭代求解。由于缺少大海带断面试验数据, 本文采用与大海带桥断面类似的闭口箱梁断面涡激力展向相干函数模型进行计算。

孙延国^[22]等通过风洞试验研究了流线型闭口箱梁断面涡激力展向相关特性, 认为涡激力展向相干函数满足式(31)的形式, 然而公式中的参数 f_1 以及 f_2 可看作与振幅无关, 并给出了如下参数值:

$$\begin{cases} f_1 = 0.0175 \\ f_2 = 0.5601 \end{cases} \quad (40)$$

大海带桥为 535 m+1624 m+535 m 的悬索桥。对于大跨度悬索桥, 其主梁振型函数可近似用正弦函数表示: $\phi_i(x) = \sin[(n+2)\pi x/L]$, $n=1,2,3,\dots$, $x \in [0, L]$ 。由于缺少大海带桥主梁振型函数的数据, 这里将其假设为正弦函数形式。

采用 3.2 节方法计算得到的涡激力展向不完全相关条件下的结构涡振响应如图 2 所示。其中结构振型函数假设为: $\phi_i(x) = \sin[3\pi x/L]$, $x \in [0, L]$, ($L = 2694 \text{ m}$)。

图 2 结果表明, 考虑涡激力展向相关性影响计算得到的实桥涡振响应不仅小于展向全相关条件下计算得到的实桥响应, 还有可能小于节段模型结果。因此, 实桥涡振响应计算过程中如果需要考虑涡激力展向相关性的影响, 必须建立在试验获得的可靠涡激力展向相关特性基础之上。

4.3 与现场实测结果比较

大海带桥在建成但未通车之前曾经历多次单模态的竖向涡激振动^[18]。为了验证本文基于尾流振

子模型计算实桥涡振响应的可靠性, 将计算结果与现场实测结果进行了比较, 如图 3 所示, 其中现场实测结果参考自文献[18]。

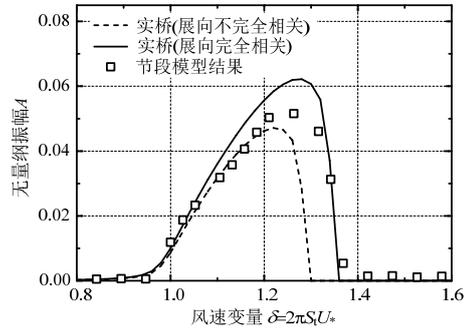


图 2 大海带桥实桥涡振计算结果与节段模型结果比较
Fig.2 Comparison of VIV amplitudes between calculated results and sectional model tests for the Great Belt Bridge

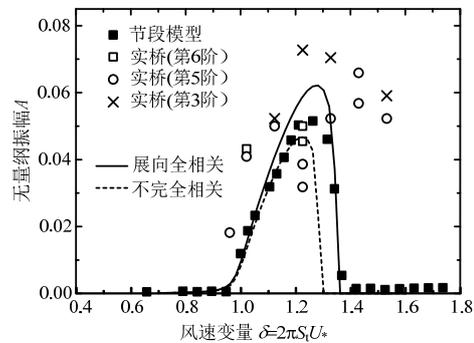


图 3 大海带桥实桥涡振计算结果与现场实测结果比较
Fig.3 Comparison of VIV amplitudes between calculated results and field measurements for the Great Belt Bridge

图 3 表明, 计算得到的实桥涡振响应与现场实测结果在锁定区范围及振幅大小方面能较好吻合。但是计算结果以及节段模型结果无论在锁定区范围还是振幅大小方面都略小于现场实测结果。上述差别可能是由于计算过程中采用的机械阻尼比以及结构振型函数与实桥真实值之间存在偏差导致。

涡激力展向全相关条件下计算得到的实桥涡振振幅与现场实测结果能较好吻合。当缺少准确的断面涡激力展向相干函数模型时, 假设涡激力展向全相关计算得到的实桥振幅可能更为可靠。

5 结论

本文基于尾流振子模型推导了桥梁节段至实桥涡振振幅转换关系。推导从展向全相关和展向不完全相关两方面展开, 分别给出了只考虑振型影响以及同时考虑振型及涡激力展向相关性影响时节段至实桥涡振振幅转换关系。基于本文给出的转换方法, 以大海带桥为算例, 计算了实桥涡振振幅,

并与现场实测结果进行了比较。根据上述研究,可得到如下结论:

(1) 不考虑涡激力展向相干性时,基于尾流振子模型得到的节段至实桥转换关系与基于传统经验非线性模型得到的转换关系一致;

(2) 考虑涡激力展向相关性影响后,计算得到的实桥涡振振幅有可能小于节段模型结果,并且计算得到的风速锁定区间也更窄。因此,实桥涡振响应计算过程中如果需要考虑涡激力展向相关性影响,必须建立在试验获得的可靠涡激力展向相关特性基础之上;

(3) 计算得到的实桥涡振响应与现场实测结果在锁定区范围及振幅大小方面能较好吻合。但是计算得到的结构振幅及锁定区范围略小于现场实测结果。当基于节段模型结果换算至实桥涡振响应时,如果没有可靠的涡激力展向相干函数模型,假定涡激力沿展向全相关得到的结果可能更可靠。

(4) 下一步研究可采用相同缩尺比大小的节段模型以及仅包含主梁的气弹模型来获取相应试验数据,以校验本文尾流振子模型及传统经验模型计算结果,对各类模型的准确性进行评价,为后续相应规范条文制定提供理论及试验支持。

参考文献:

- [1] Bishop R, Hassan A. The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1964, 277(1368): 51—75.
- [2] Skop R, Griffin O. A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders [J]. Journal of Sound and Vibration, 1973, 27(2): 225—233.
- [3] Gabbai R D, Benaroya H. An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 282(3/4/5): 575—616.
- [4] Facchinetti M L, De Langre E, Biolley F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations [J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19(2): 123—140.
- [5] Farshidianfar A, Zanganeh H. A modified wake oscillator model for vortex-induced vibration of circular cylinders for a wide range of mass-damping ratio [J]. Journal of Fluids and Structures, 2010, 26(3): 430—441.
- [6] Goswami I, Scanlan R H, Jones N P. Vortex-induced vibration of circular-cylinders. Part II. new model [J]. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 1993, 119(11): 2288—2302.
- [7] Ehsan F, Scanlan R H. Vortex-Induced vibrations of flexible bridges [J]. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 1990, 116(6): 1392—1411.
- [8] Sanlan R H. Bridge flutter derivatives at vortex lock-in [J]. Journal of Structural Engineering-Asce, 1998, 124(4): 450—458.
- [9] D'asdia P, Sepe V, Caracoglia L, et al. A model for vortex-shedding induced oscillations of long-span bridges [C]. Proceedings of the 2nd International Structural Engineering and Construction Conference (ISEC-02), Rome, Italy: 2003: 2331—2336.
- [10] Ehsan F, Scanlan R H, Bosch H R. Modeling spanwise correlation-effects in the vortex-induced response of flexible bridges [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1990, 36(1/2/3): 1105—1114.
- [11] 朱乐东. 桥梁涡激共振试验节段模型质量系统模拟与振幅修正方法[J]. 工程力学, 2005, 22(5): 204—208.
Zhu Ledong. Mass simulation and amplitude conversion of bridge sectional model test for vortex-induced resonance [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(5): 204—208. (in Chinese)
- [12] 张志田, 陈政清. 桥梁节段与实桥涡激共振幅值的换算关系[J]. 土木工程学报, 2011, 44(7): 77—82.
Zhang Zhitian, Chen Zhengqing. Similarity of amplitude of sectional model to that of full bridge in the case of vortex-induced resonance [J]. China Civil Engineering Journal, 2011, 44(7): 77—82. (in Chinese)
- [13] Sun Y, Li M, Liao H. Nonlinear approach of vortex-induced vibration for line-like structures [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2014, 124(124): 1—6.
- [14] Xu K, Ge Y, Zhang D. Wake oscillator model for assessment of vortex-induced vibration of flexible structures under wind action [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2015(136): 192—200.
- [15] Chen, Kareem A. Advances in modeling of aerodynamic forces on bridge decks [J]. American Society of Civil Engineers, 2002, 128(11): 1193—1205.
- [16] Li H, Laima S, Ou J, et al. Investigation of vortex-induced vibration of a suspension bridge with two separated steel box girders based on field measurements [J]. Engineering Structures, 2011, 33(6): 1894—1907.
- [17] Fujino Y, Yoshida Y. Wind-Induced vibration and control of trans-Tokyo bay crossing bridge [J]. Journal of Structural Engineering, 2002, 128(8): 1012—1025.
- [18] Larsen A, Esdahl S, Andersen J E, et al. Storebælt suspension bridge – vortex shedding excitation and mitigation by guide vanes [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2000, 88(2/3): 283—296.
- [19] Skop R A, Balasubramanian S. A new twist on an old model for vortex-induced vibrations [J]. Journal of Fluids and Structures, 1997, 11(4): 395—412.
- [20] Wilkinson R. Fluctuating pressures on an oscillating square prism. Part II. spanwise correlation and loading [J]. Aeronautical Quarterly, 1981, 32: 111—125.
- [21] Marinca V, Herisanu N. Nonlinear dynamical systems in engineering [M]. Berlin: Springer, 2014: 31—45.
- [22] 孙延国. 基于偏相关的大跨度桥梁涡激振动分析方法及应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2013.
Sun Yanguo. The analytical approach and application study of vortex-induced vibration of long-span bridge based on partial correlation [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2013. (in Chinese)