一　阻尼振动

现象：振幅随时间减小

原因：阻尼

阻力系数

动力学分析：　阻尼力 $F_{\mathrm{r}} = -Cv$

$$-kx - Cv = ma$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

*9 – 6 阻尼振动 受迫振动 共振

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

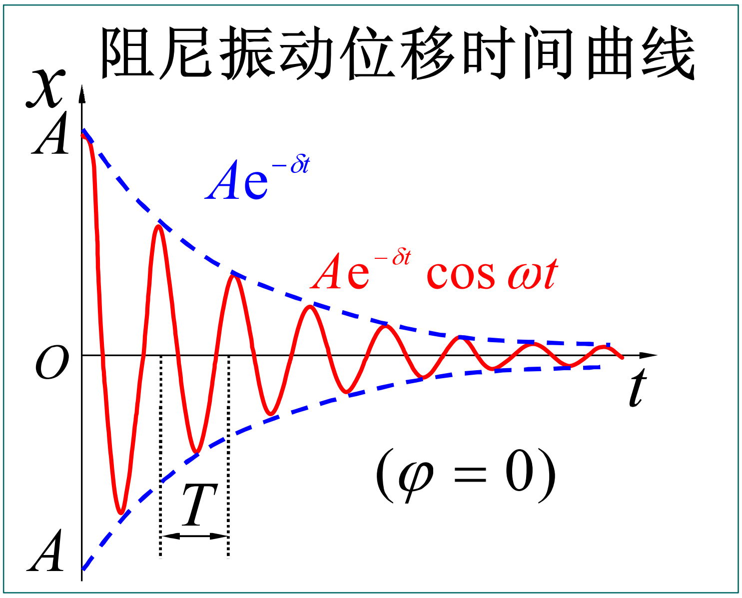
$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}} & \text{固有角频率}\\ \delta=C/2m & \text{阻尼系数}\end{cases}$$

$$x=Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$Ae^{-\delta t}$：振幅　ω：角频率

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$$x = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

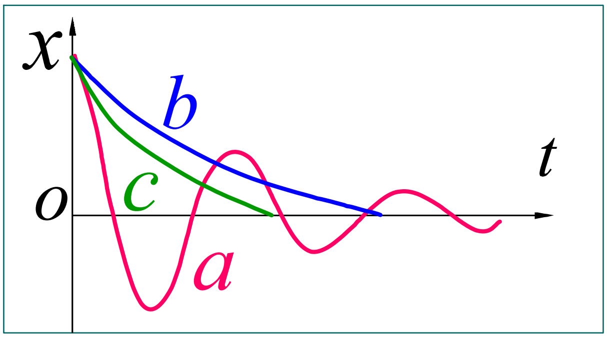


三种阻尼的比较

(a) 欠阻尼 $\omega_0^2 > \delta^2$

(b) 过阻尼 $\omega_0^2 < \delta^2$

(c) 临界阻尼 $\omega_0^2 = \delta^2$



例 有一单摆在空气（室温为 $20^\circ\mathrm{C}$）中来回摆动. 摆线长$l=1.0\ \mathrm{m}$，摆锤是半径$r=5.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}$的铅球.**求**（1）摆动周期；（2）振幅减小10％所需的时间；（3）能量减小10％所需的时间；（4）从以上所得结果说明空气的粘性对单摆周期、振幅和能量的影响.

（已知铅球密度为$\rho=2.65\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $20^\circ\mathrm{C}$时空气的粘度$\eta=1.78\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}$ ）

已知 $l=1.0\ \mathrm{m}, r=5.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}, \rho=2.65\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

$20^{\circ}\mathrm{C},\ \ \eta=1.78\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}$ 求（1）T

解（1）$\omega_0=\sqrt{g/l}=3.13\ \mathrm{s^{-1}}$

$$F_{\mathrm{r}}=-6\pi r\eta v=-Cv$$

$$\delta=C/2m=9\eta/4r^2\rho=6.04\times10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$\because \delta<<\omega_0$$

$$\therefore T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\approx\frac{2\pi}{\omega_0}\approx 2\ \mathrm{s}$$

已知 $l = 1.0\ \mathrm{m}, r = 5.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}, \rho = 2.65\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

$20^\circ\mathrm{C}$, $\eta = 1.78\times10^{-5}\ \mathrm{Pa\cdot s}$ 求（2）$A' = 0.9A, t?$

（3）$E' = 0.9E, t?$

解（2） 有阻尼时 $A' = A\mathrm{e}^{-\delta t}$

$$0.9A = A\mathrm{e}^{-\delta t_1} \qquad t_1 = \frac{\ln(1/0.9)}{\delta} = 174\ \mathrm{s} \approx 3\ \mathrm{min}$$

（3） $$\frac{E'}{E} = \left(\frac{A'}{A}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2\delta t}$$

$$0.9 = \mathrm{e}^{-2\delta t_2} \qquad t_2 = \frac{\ln(1/0.9)}{2\delta} = 87\ \mathrm{s} \approx 1.5\ \mathrm{min}$$

二 受迫振动

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=F\cos\omega_\mathrm{p}t$$

驱动力

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\delta=C/m \qquad f=F/m$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f\cos\omega_\mathrm{p}t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x=f\cos\omega_\mathrm{p} t$$

驱动力的角频率

$$x = \sout{A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)} + A\cos(\omega_\mathrm{p} t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_\mathrm{p}^2)+4\delta^2\omega_\mathrm{p}^2}} \qquad \tan\psi=\frac{-2\delta\omega_\mathrm{p}}{\omega_0^2-\omega_\mathrm{p}^2}$$

三 共振

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f\cos\omega_\mathrm{p}t$$

$$x=A\cos(\omega_\mathrm{p}t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_\mathrm{p}^2)+4\delta^2\omega_\mathrm{p}^2}}\qquad\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega_\mathrm{p}}=0$$

$$x=A_0\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)+A\cos(\omega_\mathrm{p}t+\psi)$$

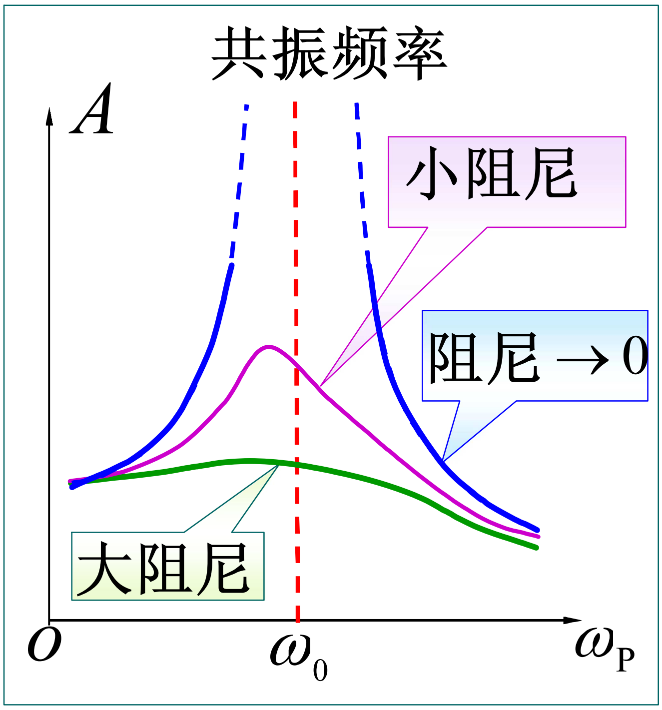
共振频率

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

共振振幅

$$A_r = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

共 振 现 象 及 应 用



选择进入下一节：