第五章　线性微分方程组

§5.1　存在唯一性定理

本节重点：存在唯一性定理及证明方法

5.1.1 记号和定义

考察形如

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

的一阶线性微分方程组，其中 $a_{ij}(t)\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$ 和 $f_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上是连续的.

方程组（5.1）可写成

$$X' = A(t)X + f(t) \tag{5.4}$$

一个矩阵或一个在向量在区间 $a\le t\le b$ 上称为**连续**的，如果它的每一个元素都是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数.

一个 $n\times n$ 矩阵 $B(t)$ 或一个 n 维列向量 $u(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上称为**可微**的，如果它的每一个元素都在区间 $a\le t\le b$ 上可微

矩阵 $B(t)$ 或向量 $u(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上称为**可积**的，如果它的每一个元素都在区间 $a\le t\le b$ 上可积.

定义 1　设 $A(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵， $f(t)$ 是同一区间 $a\le t\le b$ 上的连续 n 维向量. 方程组

$$X' = A(t)X + f(t)$$

在某区间 $\alpha\le t\le\beta$ （这里 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ ）的解就是向量 $u(t)$ ，它的导数 $u'(t)$ 在区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上连续且满足

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t),\quad \alpha\le t\le\beta.$$

考虑

$$\begin{cases} X' = A(t)X + f(t), \\ X(t_0) = \eta, \qquad t_0\in[a,b] \end{cases} \tag{5.5}$$

定义 2　初值问题（5.5）的解就是方程组（5.4）在包含 t_0 的区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上的解 $u(t)$ ，

使得$u(t_0)=\eta$.

例1 验证向量$u(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$是初值问题$X'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}X,\ X(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$在区间$-\infty<t<+\infty$上的解.

n阶线性微分方程的初值问题可化为形如（5.5）的线性微分方程组的初值问题.

令

$$x_1=x,\ x_2=x',\ x_3=x'',\cdots,\ x_n=x^{(n-1)}.$$

每一个n阶线性微分方程可化为n个一阶线性微分方程构成的方程组，反之却不成立.

例如方程组 $X'=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}X,\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$不能化为一个二阶微分方程.

5.1.2 存在唯一性定理

$$\begin{cases} X'=A(t)X+f(t), \\ X(t_0)=\eta, \qquad t_0\in[a,b] \end{cases}$$

定义$n\times n$矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}$和n维向量$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$的范数为

$$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \|X\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

性质：

1） $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|,\quad \|AX\|\le\|A\|\cdot\|X\|$；

2） $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|,\quad \|X+Y\|\le\|X\|+\|Y\|$.

这里A,B是$n\times n$矩阵，X,Y是n维向量.

向量序列$\{X_k(t)\},X_k(t)=\begin{bmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \\ x_{nk}(t) \end{bmatrix}$，称为在区间$a\le t\le b$上收敛的（一致收敛的），

如果对于每一个$i(i=1,2,\cdots,n)$，函数序列$\{x_{ik}(t)\}$在区间$a\le t\le b$上收敛的(一致收敛的).

易知，区间$a\le t\le b$上的连续向量函数序列$\{X_k(t)\}$的一致收敛极限向量函数仍是连续的.

向量函数级数$\sum_{k=1}^{\infty}X_k(t)$称为在区间$a\le t\le b$上收敛的（一致收敛的），如果其部分和

作成的向量函数序列在区间 $a \le t \le b$ 上是收敛的（一致收敛的）.

判别函数级数的一致收敛性的维氏判别法对于向量函数级数也是成立的，即，如果

$$\|X_k(t)\| \le M_k, \quad a \le t \le b$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是一致收敛的.

积分号下取极限的定理对于向量函数也是成立的，即，如果连续向量函数序列 $\{X_k(t)\}$ 在区间 $a \le t \le b$ 上一致收敛的，则

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b X_k(t)dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} X_k(t)dt$$

$n \times n$ 矩阵序列 $\{A_k\}$，其中 $A_k = [a_{ij}^k]_{n\times n}$，称为收敛的，如果对一切 $i, j = 1,2,\cdots n$，数列 $\{a_{ij}^k\}$ 都是收敛的.

无穷矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \cdots$

称为收敛的，如果它的部分和所成序列是收敛的.

如果对每一个整数 k，$\|A_k\| \le M_k$，而数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的，则 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 也是收敛的.

定理 1 （存在唯一性定理）如果 $A(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵，$f(t)$ 是 n 列维向量，它们都在区间 $a \le t \le b$ 上连续，则对于区间 $a \le t \le b$ 上的任何数 t_0 及任一常数 n 维列向量 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$，方程组

$$X' = A(t)X + f(t)$$

存在唯一解 $\varphi(t)$，定义于整个区间 $a \le t \le b$ 上，且满足初始条件 $\varphi(t_0) = \eta$.

推论 1 （即第四章定理 1） 如果 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ 都在区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数，则对于区间 $a \le t \le b$ 上的任一数 t_0 以及任意的 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

存在唯一解 $\omega(t)$，定义于整个区间 $a \le t \le b$ 上且满足初始条件

$$\omega(t_0) = \eta_1, \omega'(t_0) = \eta_2, \cdots, \omega^{(n-1)}(t_0) = \eta_n.$$

习题 5.1　第 201 页 1；2（1），（3）；3

§5.2　线性微分方程组的一般理论

本节重点：线性微分方程组解的结构问题，求解线性微分方程组

本节难点：求非齐线性微分方程组的常数变易法

讨论线性微分方程组

$$X' = A(t)X + f(t) \tag{5.14}$$

的一般理论，主要是研究它的解的结构问题.

如果 $f(t) \equiv 0$，则（5.14）称为**非齐线性的.**

如果 $f(t) \equiv 0$，则（5.14）变为　$X' = A(t)X$　（5.15）

（5.15）称为**齐线性的.** 把（5.15）称为对应于（5.14）的**齐线性微分方程组.**

5.2.1　齐线性微分方程组

假设矩阵 $A(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上是连续的. 设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是（5.15）的任意两个解，α 和 β 是两个任意常数，可知 $\alpha u + \beta v$ 也是（5.15）的解.

定理 2（叠加原理）如果 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是（5.15）的解，则它们的线性组合 $\alpha u + \beta v$ 也是（5.15）的解，这里 α 和 β 是任意常数.

问题：（5.15）的所有解的集合构成一个线性空间，那么该空间的维数是多少？

称定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_m(t)$ 是**线性相关**的，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得等式 $c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_mX_m(t) = 0,$ $a \le t \le b$ 成立；否则，称 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_m(t)$ 是**线性无关**的.

例

设有 n 个定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

由这 n 个向量函数构成的行列式

$$W[X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t),] = W(t)$$
$$= \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些向量函数的**朗斯基行列式.**

定理 3 如果向量函数 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则它们的朗斯基行列式 $W(t) = 0 \ \ (a \le t \le b)$.

定理 4 如果（5.15）的解 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 线性无关，那么它们的朗斯基行列式 $W(t) \ne 0 \ \ (a \le t \le b)$.

由定理 3、4 可知，由（5.15）的 n 个解作成的 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 的朗斯基行列式 $W(t)$，或者恒等于零，或者恒不等于零.

定理 5 （5.15）一定存在 n 个线性无关解 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$.

定理 6 如果 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 是（5.15）的 n 个线性无关解，则（5.15）的任一解 $X(t)$ 均可表示为

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t),$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数.

推论 1 （5.15）的线性无关解的最大个数等于 n.

称（5.15）的 n 个线性无关的解 $X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)$ 为（5.15）的一个基本解组.

由定理 5、6 可知，（5.15）的解空间的维数是 n.
结论：（5.15）所有解的集合构成一个 n 维线性空间.
由定理 6 可直接得到

推论 2 如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是 n 阶微分方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \qquad (5.21)$$

的 n 个线性无关的解，其中 $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数，则（5.21）的任一解 $x(t)$ 均可表示为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t),$$

这里$c_1,c_2,\cdots,c_n$是相应的确定常数.

如果一个$n\times n$矩阵的每一列都是（5.15）的解，称这个矩阵为（5.15）的**解矩阵**. 它的列在$a\le t\le b$上是线性无关的解矩阵称为在$a\le t\le b$上（5.15）的**基解矩阵**. 用$\phi(t)$表示由（5.15）的n个线性无关的解$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$, 作为列构成的基解矩阵.

定理 1* （5.15）一定存在一个基解矩阵$\phi(t)$. 如果$\psi(t)$是（5.15）的任一解，那么

$$\psi(t)=\phi(t)C \tag{5.22}$$

这里C是确定的n维常数列向量.

定理 2* (5.15)的一个解矩阵$\phi(t)$是基解矩阵的充要条件是$\det\phi(t)\neq 0\quad(a\le t\le b)$.

而且，如果对某一个$x_0\in[a,b]$，$\det\phi(t_0)\neq 0$，则$\det\phi(t)\neq 0\quad(a\le t\le b)$.

注意，行列式等于零的矩阵的列向量未必是线性相关的.

例

推论 1* 如果$\phi(t)$是（5.15）在区间$a\le t\le b$上的基解矩阵，C是非奇异$n\times n$常数阵，那么$\phi(t)C$也是（5.15）在区间$a\le t\le b$上的基解矩阵.

推论 2* 如果$\phi(t)$，$\psi(t)$在区间$a\le t\le b$上是$X'(t)=A(t)X(t)$的两个基解矩阵，那么，存在一个非奇异$n\times n$常数阵C，使得在区间$a\le t\le b$上$\psi(t)\equiv\phi(t)C$.

习题 第 216 页 1；2；3；4

5.2.2 非齐次线性微分方程组

讨论非齐次线性微分方程组

$$X'=A(t)X+f(t) \tag{5.14}$$

的解的结构问题，这里$A(t)$是区间$a\le t\le b$上的已知$n\times n$连续矩阵，$f(t)$是区间$a\le t\le b$上的已知n维连续列向量.

性质 1 如果$\varphi(t)$是（5.14）的解，$\psi(t)$是（5.14）对应的齐次线性微分方程组（5.15）的解. 则$\varphi(t)+\psi(t)$是（5.14）的解.

性质 2 如果$\tilde{\varphi}(t)$和$\bar{\varphi}(t)$是（5.14）的两个解，则$\tilde{\varphi}(t)-\bar{\varphi}(t)$是（5.15）的解.

定理 7 设$\phi(t)$是（5.15）的基解矩阵，$\bar{\varphi}(t)$是（5.14）的某一解，则（5.14）的任一解$\varphi(t)$都可表示为

$$\varphi(t)=\phi(t)c+\overline{\varphi}(t) \tag{5.23}$$

这里c是确定的常数列向量.

常数变易法

如果c是常数列向量，则$\varphi(t)=\phi(t)c$是（5.15）的解，它不是是（5.14）的解. 因此将c变易为t的向量函数，而试图寻求（5.14）的形如

$$\varphi(t)=\phi(t)c(t) \tag{5.24}$$

的解. 这里$c(t)$是待定的向量函数.

定理 8 如果$\phi(t)$是（5.15）的基解矩阵，则向量函数

$$\varphi(t)=\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds,\quad t_0,t\in[a,b]$$

是（5.14）的解，且满足初始条件

$$\varphi(t_0)=0.$$

（5.14）的满足初始条件 $\varphi(t_0)=\eta$的解$\varphi(t)$由下面公式给出

$$\varphi(t)=\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)f(s)ds, \tag{5.27}$$

这里$\varphi_h(t)\equiv\phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta$是（5.15）的满足初始条件 $\varphi_h(t_0)=\eta$

的解. 公式（5.26）或（5.27）称为非齐线性微分方程组（5.14）的常数变易公式.

例 2 试求初值问题

$$X'=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}e^{-t}\\0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ X(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

的解.

推论 3 如果$a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),\ f(t)$是区间$a\le t\le b$上的连续函数，$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是区间$a\le t\le b$上齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \tag{5.21}$$

基本解组，那么非齐次线性微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \tag{5.28}$$

的满足初始条件

$$\varphi(t_0)=0,\varphi'(t_0)=0,\cdots,\varphi^{(n-10}(t_0)=0\quad t_0\in[a,b]$$

的解由下面公式给出

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{W_k[x_1(s),\, x_2(s),\cdots,\, x_n(s)]}{W[x_1(s),\, x_2(s),\cdots,\, x_n(s)]}\right\}f(s)ds \tag{5.29}$$

这里 $W[x_1(s),\, x_2(s),\cdots,\, x_n(s)]$ 是 $x_1(s),\, x_2(s),\cdots,\, x_n(s)$ 的朗斯基行列式，$W_k[x_1(s),\, x_2(s),\cdots,\, x_n(s)]$是在$W[x_1(s),\, x_2(s),\cdots,\, x_n(s)]$中的第$k$列代以$(0,\, 0,\cdots,0,\, 1)^T$后得到行列式，而且（5.28）的任一解$u(t)$都具有形式

$$u(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t) \tag{5.30}$$

这里$c_1,c_2,\cdots,c_n$是适当选取的常数.

公式（5.29）称为（5.28）的**常数变易公式**.

这时（5.28）的通解可以表示为

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t)$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$是任意常数. 它包含了方程（5.28）的所有解.（第 4 章定理 7 的结论）

例 3 试求方程

$$x''+x=tg\,t$$

的一个解.

习题 5.2 第 页 5；67（1）；8；9（1），（3）；10（1）；11

§5.3 常系数线性微分方程组

本节讨论常系数线性微分方程组

$$X'=AX \tag{5.33}$$

的基解矩阵的结构，这里A是$n\times n$常数矩阵.

5.3.1 矩阵指数 $\exp A$ 的定义和性质

如果A是一个$n\times n$常数矩阵，定义矩阵指数$\exp A$为下面的矩阵级数的和

$$\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=E+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^m}{m!}+\cdots \tag{5.34}$$

其中E为n阶单位矩阵，A^m是矩阵A的m次幂. 规定$A^0=E,\, 0!=1$. 这个级数对于所有的A都是收敛的，因而，$\exp A$是一个确定的矩阵.

矩阵指数 $\exp A$ 的性质.

1 如果矩阵 A,B 可交换的，即 $AB=BA$，则

$$\exp(A+B)=\exp A\exp B \tag{5.36}$$

2 对于任何矩阵 A，$(\exp A)^{-1}$ 存在，且

$$(\exp A)^{-1}=\exp(-A) \tag{5.39}$$

3 如果 T 是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT)=T^{-1}(\exp A)T \tag{5.40}$$

定理 9 矩阵

$$\phi(t)=\exp At \tag{5.41}$$

是（5.33）的基解矩阵，且 $\phi(0)=E$.

例1 如果 A 是一个对角形矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$（其中未写出的元素均为零）

试找出 $X'=AX$ 的基解矩阵

例2 试求 $X'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}X$ 的基解矩阵.

5.3.2 基解矩阵的计算公式

为了计算（5.33）的基解矩阵 $\exp At$，引进矩阵的特征值和特征向量的概念.

定义 假设 A 是一个 $n\times n$ 常数矩阵，使得关于 u 的线性代数方程组

$$(\lambda E-A)u=0 \tag{5.45}$$

具有非零解的常数 λ 称为 A 的一个**特征值**.（5.45）的对应于任一特征值 λ 的非零解 u 称为 A 的**对应于特征值 λ 的特征向量.**

n 次多项式

$$p(\lambda)\equiv\det(\lambda E-A)$$

称为 A 的**特征多项式**，n 次代数方程

$$p(\lambda)=0 \tag{5.46}$$

称为 A 的**特征方程.** 也称它为（5.33）的特征方程.

$e^{\lambda t}c$ 是方程（5.33）的解，当且仅当 λ 是 A 的特征值，且 c 是对应于 λ 的特征向量. A 的特征值就是特征方程（5.46）的根. 因为 n 次代数方程有 n 个根，所以 A 有 n 个特征值，

当然不一定 n 个都互不相同. 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的单根，则称 λ_0 是**简单特征根.** 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的 k 重根（即 $p(\lambda)$ 具有因子 $(\lambda-\lambda_0)^k$，而没有因子 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$），则称 λ_0 是 k **重特征根.**

例3 试求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量.

例4 试求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

的特征值和对应的特征向量.

定理 10 如果矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，它们对应的特征值分别是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（不必各不相同），那么矩阵

$$\phi(t)=[e^{\lambda_1 t}v_1,e^{\lambda_2 t}v_2,\cdots,e^{\lambda_n t}v_n],-\infty<t<+\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$X'=AX \tag{5.33}$$

的一个基解矩阵.

例 5 试求方程组

$$X'=AX\text{，其中 }A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

的一个基解矩阵.

一般来说，定理 10 中的 $\phi(t)$ 不一定就是 $\exp At$. 但它们都是（5.33）的基解矩阵，所以存在一个非奇异的常数阵 C，使得

$$\exp At=\phi(t)C.$$

在上式中，令 $t=0$，得到 $C=\phi^{-1}(0)$. 因此

$$\exp At=\phi(t)\phi^{-1}(0) \tag{5.47}$$

根据公式（5.47），$\exp At$ 的计算问题相当于方程组（5.33）的任一基解矩阵的计算问题.

附注 1 如果 A 是实的，那么 $\exp At$ 也是实的. 因此，当 A 是实时，公式（5.47）给出

一个构造实的基解矩阵的方法.

例6　试求例 5 的实基解矩阵（或计算 $\exp At$ ）.

当 A 只有一个特征值时，由 $\exp At$ 的定义，得到

$$\exp At = e^{\lambda t}\exp(A-\lambda E)t = e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(A-\lambda E)^i \tag{5.53}$$

例7 如果 A 是例 4 的矩阵，试解初值问题 $X' = AX$ ， $\phi(0)=\eta$ ，并求 $\exp At$.

例8　如果

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$，试求 $\exp At$.

例9 考虑方程组

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

这里系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

试求满足初值条件 $\varphi(0)=\eta$ 的解 $\varphi(t)$ ，并求 $\exp At$.

定理 11　给定常系数线性微分方程组

$$X' = AX \tag{5.33}$$

那么，1）如果 A 的特征值的实部都是负的，则（5.33）的任一解当 $t\to\infty$ 时都趋于零.

2）如果 A 的特征值的实部都是非正的，且实部为零的特征值都是简单特征值，则（5.33）的任一解当 $t\to\infty$ 时都保持有界.

3）如果 A 的特征值至少有一个具有正实部，则（5.33）至少有一个解当 $t\to\infty$ 时趋于无穷.

附注 2　利用约当标准型计算基解矩阵. （见第 236 页）

附注 3　计算基解矩阵 $\exp At$ 的另一种方法

非齐次线性微分方程组

$$X' = AX + f(t) \tag{5.60}$$

的常数变易公式为

$$\varphi(t)=\exp[(t-t_0)A]\eta+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)A]f(s)ds\,. \tag{5.61}$$

例10　设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}.$$

试求方程 $X'=AX+f(t)$ 满足初值条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 的 $\varphi(t)$.

5.3.3　拉普拉斯变换的应用（略，第 240 页）

习题 5.3　1；2；3（1），（3）；4（1），（3）；5（1），（3）；6（1），（3）；7；8（1），（3）；10（1），（3）；11.