

第二章 静电场(Electrostatic Field)

唯一性定理 Uniqueness Theorem

刘艳红

山西大同大学物理与电子科学学院

October 7, 2013

研究内容 (teaching objectives)

研究内容 (teaching objectives)

- ① 需要给出那些条件，静电场的解唯一被确定？

研究内容 (teaching objectives)

- ① 需要给出那些条件，静电场的解唯一被确定？
- ② 静电场学中许多问题都涉及到有限空间区域，在区域内可以有电荷，也可以无电荷。但都具有确定的边界条件。要使区域内存在唯一的、合理的解，需要Poisson方程的边界条件是什么？**唯一性定理**回答了这个问题。

教学目标 (teaching objectives)

教学目标 (teaching objectives)

- 静电问题的唯一性定理;

教学目标 (teaching objectives)

- ① 静电问题的唯一性定理;
- ② 有导体存在时的唯一性定理

教学目标 (teaching objectives)

- ① 静电问题的唯一性定理;
- ② 有导体存在时的唯一性定理

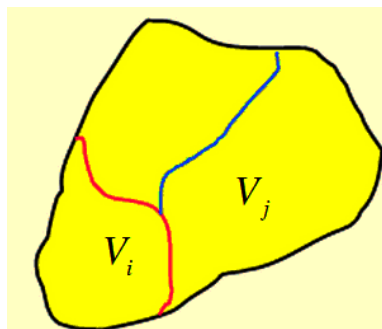
一、静电问题的唯一性定理

一、静电问题的唯一性定理

- 静电问题

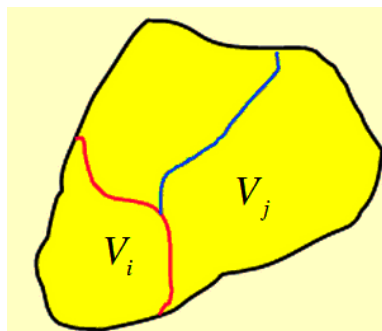
一、静电问题的唯一性定理

- 静电问题



一、静电问题的唯一性定理

• 静电问题

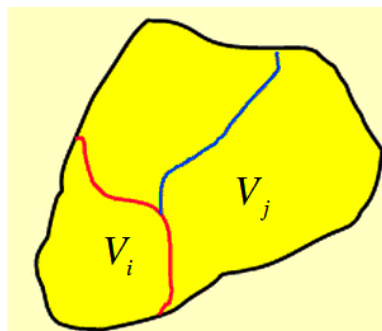


在可以均匀分区的区域 V 内，每一个分区域的介电常数为 ϵ_j ，设 V 内有给定的自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$ 则电势 ϕ 在 V_i 内满足的方程：

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_j} \quad (1)$$

一、静电问题的唯一性定理

• 静电问题



在可以均匀分区的区域 V 内，每一个分区域的介电常数为 ϵ_i ，设 V 内有给定的自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$ 则电势 ϕ 在 V_i 内满足的方程：

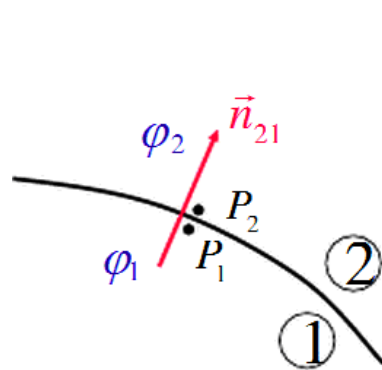
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_i} \quad (1)$$

需要求解所有边界上满足边值关系或者给定边界条件的Poisson方程的解。

一、静电问题的唯一性定理

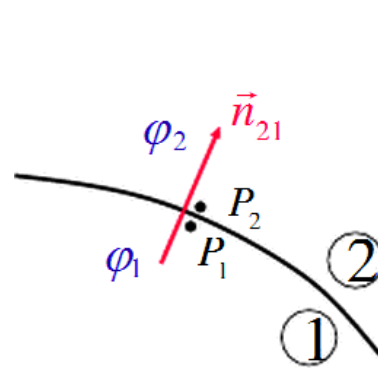
一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：



一、静电问题的唯一性定理

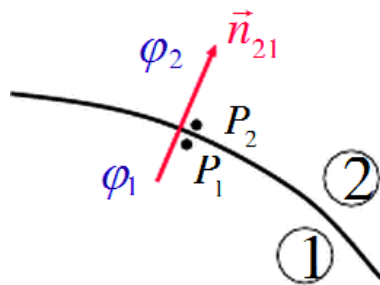
已知静电势的边值关系：



$$\phi_1 = \phi_2 \quad (2)$$

一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：

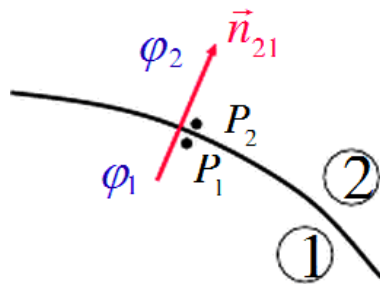


$$\phi_1 = \phi_2 \quad (2)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \quad (3)$$

一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：



$$\phi_1 = \phi_2 \quad (2)$$

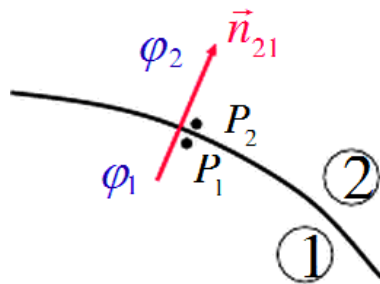
$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \quad (3)$$

若分界面上无自由电荷分布，则：

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \quad (4)$$

一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：



$$\phi_1 = \phi_2 \quad (2)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \quad (3)$$

若分界面上无自由电荷分布，则：

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \quad (4)$$

一、静电问题的唯一性定理

一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$, 在 V 的边界 S 上给定:

- 电势 $\phi|_s$

一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$ ，在 V 的边界 S 上给定：

- 电势 $\phi|_S$
- 电势的法线方向偏导数 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$

一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$, 在 V 的边界 S 上给定:

- 电势 $\phi|_S$
- 电势的法线方向偏导数 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$

则 V 内的电场唯一确定。

可以采用反证法证明:

- a. 假设两组不同的解 ϕ' 和 ϕ'' 都满足唯一性定理。

一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$, 在 V 的边界 S 上给定:

- 电势 $\phi|_S$
- 电势的法线方向偏导数 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$

则 V 内的电场唯一确定。

可以采用反证法证明:

- a. 假设两组不同的解 ϕ' 和 ϕ'' 都满足唯一性定理。
- b. 证明 ϕ' 与 ϕ'' 至多差一个常数。

一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$ ，在 V 的边界 S 上给定：

- 电势 $\phi|_S$
- 电势的法线方向偏导数 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$

则 V 内的电场唯一确定。

可以采用反证法证明：

- a. 假设两组不同的解 ϕ' 和 ϕ'' 都满足唯一性定理。
- b. 证明 ϕ' 与 ϕ'' 至多差一个常数。

一、静电问题的唯一性定理

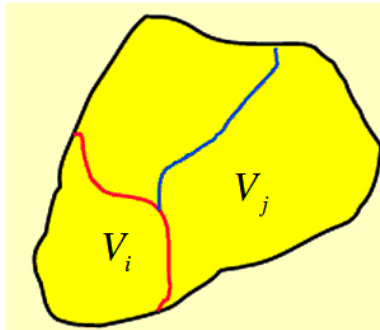
一、静电问题的唯一性定理

- c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。

一、静电问题的唯一性定理

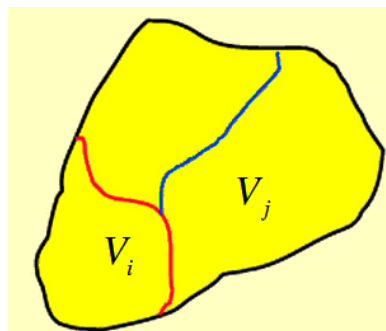
• c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。

证明:



一、静电问题的唯一性定理

• c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。



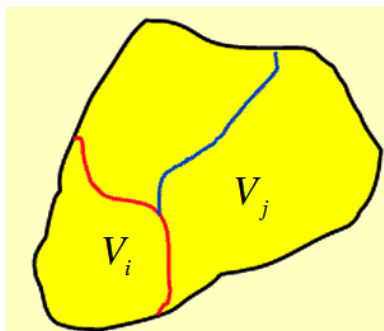
证明:

假设有两组不同的解: ϕ' 和 ϕ'' , 都满足唯一性定理的条件, 写出Poisson方程:

$$\nabla^2 \phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_j} \quad (5)$$

一、静电问题的唯一性定理

• c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。



证明:

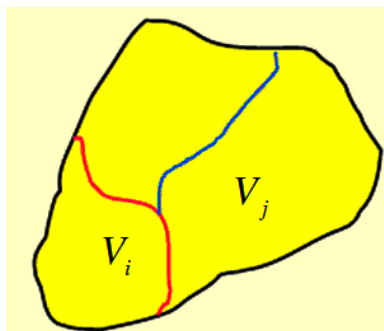
假设有两组不同的解: ϕ' 和 ϕ'' , 都满足唯一性定理的条件, 写出Poisson方程:

$$\nabla^2 \phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_j} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \phi'' = -\frac{\rho}{\epsilon_j} \quad (6)$$

一、静电问题的唯一性定理

• c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。



证明:

假设有两组不同的解: ϕ' 和 ϕ'' , 都满足唯一性定理的条件, 写出Poisson方程:

$$\nabla^2 \phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_j} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \phi'' = -\frac{\rho}{\epsilon_j} \quad (6)$$

一、静电问题的唯一性定理

一、静电问题的唯一性定理

设定： $\phi = \phi' - \phi''$ ，因此对于每个均匀区域有 $\nabla^2\phi = 0$

另一方面，在介质分界面上， ϕ' 和 ϕ'' 满足

$$\phi'_i = \phi'_j$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi'_j}{\partial n}$$

一、静电问题的唯一性定理

设定： $\phi = \phi' - \phi''$ ，因此对于每个均匀区域有 $\nabla^2\phi = 0$

另一方面，在介质分界面上， ϕ' 和 ϕ'' 满足

$$\phi'_i = \phi'_j$$

$$\phi''_i = \phi''_j$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi'_j}{\partial n}$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi''_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi''_j}{\partial n}$$

一、静电问题的唯一性定理

设定： $\phi = \phi' - \phi''$ ，因此对于每个均匀区域有 $\nabla^2\phi = 0$

另一方面，在介质分界面上， ϕ' 和 ϕ'' 满足

$$\phi'_i = \phi'_j$$

$$\phi''_i = \phi''_j$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi'_j}{\partial n}$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi''_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi''_j}{\partial n}$$

因此在分界面上 ϕ 和 $\epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial n}$ 都是连续的。

一、静电问题的唯一性定理

一、静电问题的唯一性定理

在 V 的外边界 S 上给定边界条件:

$$\phi|_S = \phi'|_S - \phi''|_S = 0 \quad (7)$$

一、静电问题的唯一性定理

在 V 的外边界 S 上给定边界条件:

$$\phi|_S = \phi'|_S - \phi''|_S = 0 \quad (7)$$

或者

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_S = \frac{\partial \phi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi''}{\partial n}|_S = 0 \quad (8)$$

一、静电问题的唯一性定理

在 V 的外边界 S 上给定边界条件:

$$\phi|_S = \phi'|_S - \phi''|_S = 0 \quad (7)$$

或者

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_S = \frac{\partial \phi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi''}{\partial n}|_S = 0 \quad (8)$$

考察第 i 个均匀区域 V_i 的界面上的面积分:

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = ? \quad (9)$$

一、静电问题的唯一性定理

在 V 的外边界 S 上给定边界条件:

$$\phi|_S = \phi'|_S - \phi''|_S = 0 \quad (7)$$

或者

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_S = \frac{\partial \phi'}{\partial n}|_S - \frac{\partial \phi''}{\partial n}|_S = 0 \quad (8)$$

考察第 i 个均匀区域 V_i 的界面上的面积分:

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = ? \quad (9)$$

一、静电问题的唯一性定理

一、静电问题的唯一性定理

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{V_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 + \int_{V_i} \epsilon_i \phi \nabla^2 \phi dV \quad (10)$$

一、静电问题的唯一性定理

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{V_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 + \int_{V_i} \epsilon_i \phi \nabla^2 \phi dV \quad (10)$$

对于整个区域V, 有:

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{V_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 \quad (11)$$

一、静电问题的唯一性定理

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{V_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 + \int_{V_i} \epsilon_i \phi \nabla^2 \phi dV \quad (10)$$

对于整个区域V，有：

$$\oint_{S_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{V_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 \quad (11)$$

由于在 V_i ， V_j 分界面上， ϕ ， $\epsilon \nabla \phi$ 的法向分量分别相等，但是由于 $d\vec{S}_i = -d\vec{S}_j$ 所以内部分解面得积分全部抵消，只剩下整个V的边界面S上的积分。

一、静电问题的唯一性定理

一、静电问题的唯一性定理

但是在边界面上 $\phi|_s = 0$ 或者是 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_s = 0$ 所以:

$$\sum_i V_i \epsilon_i (\nabla\phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\phi = 0 \quad (12)$$

一、静电问题的唯一性定理

但是在边界面上 $\phi|_s = 0$ 或者是 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_s = 0$ 所以:

$$\sum_i V_i \epsilon_i (\nabla\phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\phi = 0 \quad (12)$$

即在区域 V 上 ϕ 为常量, 因此:

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' \Rightarrow \vec{E}'' = -\nabla\phi'' = -\nabla(\phi' + C) = \vec{E}' \quad (13)$$

一、静电问题的唯一性定理

但是在边界面上 $\phi|_s = 0$ 或者是 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_s = 0$ 所以:

$$\sum_i V_i \epsilon_i (\nabla\phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\phi = 0 \quad (12)$$

即在区域 V 上 ϕ 为常量, 因此:

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' \Rightarrow \vec{E}'' = -\nabla\phi'' = -\nabla(\phi' + C) = \vec{E}' \quad (13)$$

二、有导体存在时的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

设区域 V 内有一些导体, 给定导体之外的电荷分布 ρ , 给定每个导体的电势 ϕ_i 或者个导体上的总电荷 Q_i , 以及 V 的边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$, 则 V 内电场唯一确定。

这样分为两类问题:

- 第一类问题的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

设区域 V 内有一些导体, 给定导体之外的电荷分布 ρ , 给定每个导体的电势 ϕ_i 或者个导体上的总电荷 Q_i , 以及 V 的边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$, 则 V 内电场唯一确定。

这样分为两类问题:

- 第一类问题的唯一性定理
- 第二类问题的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

设区域 V 内有一些导体, 给定导体之外的电荷分布 ρ , 给定每个导体的电势 ϕ_i 或者个导体上的总电荷 Q_i , 以及 V 的边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$, 则 V 内电场唯一确定。

这样分为两类问题:

- 第一类问题的唯一性定理
- 第二类问题的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质)内给定 ρ

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ
 - ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ
 - ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
 - iii) 每个导体 i 的电势 ϕ_i

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ
 - ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
 - iii) 每个导体 i 的电势 ϕ_i

则 V' 内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ
 - ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
 - iii) 每个导体 i 的电势 ϕ_i

则 V' 内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ
 - ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
 - iii) 每个导体 i 的电势 ϕ_i

则 V' 内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理
 - i) V' (介质) 内给定 ρ
 - ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理

- i) V' (介质) 内给定 ρ
- ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
- iii) 每个导体 i 的电势 ϕ_i

则 V' 内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理

- i) V' (介质) 内给定 ρ
- ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
- iii) 每个导体上的电荷量 Q_i

二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理

- i) V' (介质) 内给定 ρ
- ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
- iii) 每个导体 i 的电势 ϕ_i

则 V' 内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理

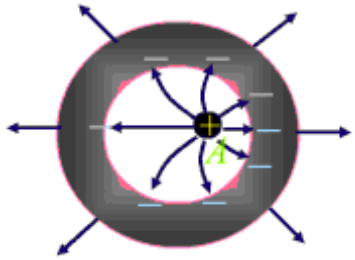
- i) V' (介质) 内给定 ρ
- ii) 给定边界 S 上的 $\phi|_S$ 或者 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_S$
- iii) 每个导体上的电荷量 Q_i

则 V' 内的电场唯一确定

二、有导体存在时的唯一性定理

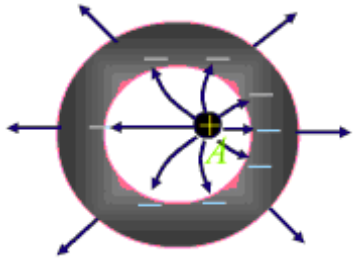
二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。



二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

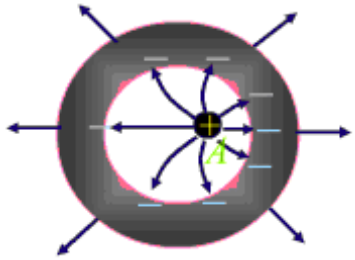


分析：壳外电势满足

{

二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

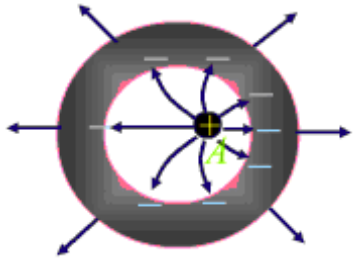


分析：壳外电势满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = 0 \end{array} \right.$$

二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

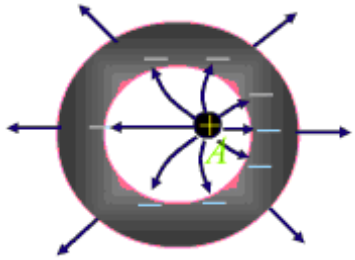


分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_s = \phi_0 \end{cases}$$

二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

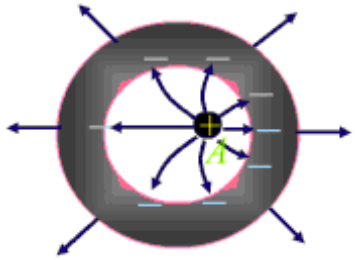


分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_s = \phi_0 \\ \phi_i = 0 \end{cases}$$

二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

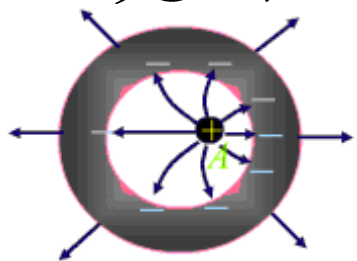


分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_s = \phi_0 \\ \phi_i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。



分析：壳外电势满足

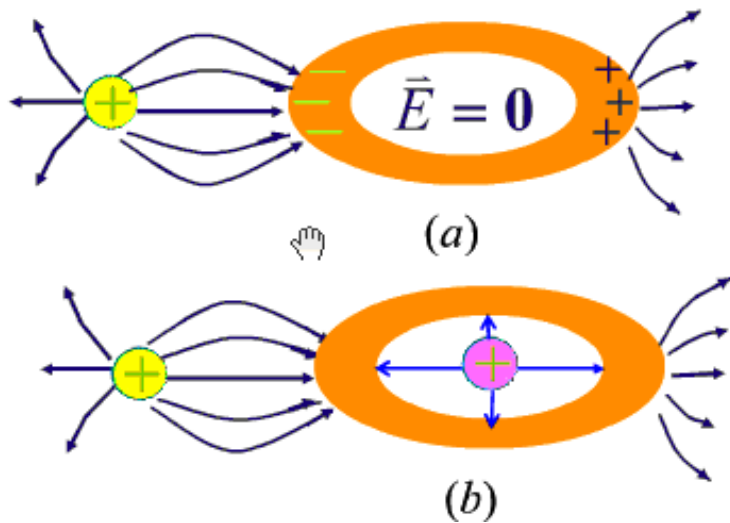
$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi|_s = \phi_0 \\ \phi_i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

不论壳内电荷位置如何变化，上述边界条件不变，故壳外电场与电荷在壳内的位置无关。

二、有导体存在时的唯一性定理

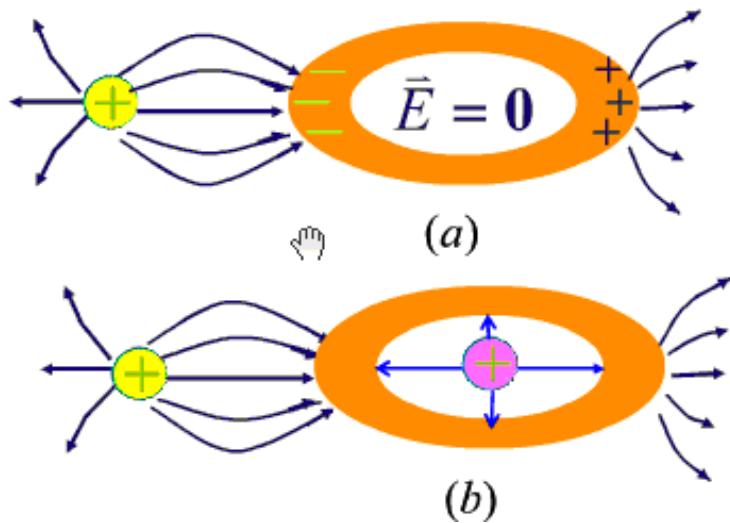
二、有导体存在时的唯一性定理

如果壳外有带电体存在，分析壳内无电荷 (a) 与壳内有电荷 (b) 时外部电场的异同



二、有导体存在时的唯一性定理

如果壳外有带电体存在，分析壳内无电荷 (a) 与壳内有电荷 (b) 时外部电场的异同



两种情形壳外电场相同，原因是壳外的电荷分布以及边界条件相同。