

磁标势(Magnetic scalar potential)

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

2013.10.29

teaching objectives

- ④ 引入磁标势的条件;

- ① 引入磁标势的条件;
- ② 磁标势满足的方程;

- ① 引入磁标势的条件;
- ② 磁标势满足的方程;
- ③ 静电场与静磁场方程的比较;

- 1 引入磁标势的条件;
- 2 磁标势满足的方程;
- 3 静电场与静磁场方程的比较;
- 4 应用举例;

- 1 引入磁标势的条件;
- 2 磁标势满足的方程;
- 3 静电场与静磁场方程的比较;
- 4 应用举例;

1. 引入磁标势的条件

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

1. 引入磁标势的条件

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

1. 引入磁标势的条件

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

notes:

- 1. 在有电流的区域必须根据情况挖去一部分区域；

1. 引入磁标势的条件

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

notes:

- 1. 在有电流的区域必须根据情况挖去一部分区域；
- 2. 若空间仅有永久磁铁，则可在全空间引入。

2. 磁标势满足的方程

若能引入磁标势，则磁场满足：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

2. 磁标势满足的方程

若能引入磁标势，则磁场满足：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

引入磁标势 φ_m ，满足 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$ ，

2. 磁标势满足的方程

若能引入磁标势, 则磁场满足:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

引入磁标势 ϕ_m , 满足 $\vec{H} = -\nabla \phi_m$, 得到

$$\nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

其中 $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$

2.磁标势满足的方程

边值关系:

2. 磁标势满足的方程

边值关系:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \Rightarrow \varphi_{m1}|_S = \varphi_{m2}|_S$$

2. 磁标势满足的方程

边值关系:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \Rightarrow \varphi_{m1}|_S = \varphi_{m2}|_S$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \Rightarrow \mu_1 \left(\frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial n} \right) |_S = \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial n} \right) |_S$$

3. 静电场与静磁场方程的比较

静电场

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_P}{\varepsilon_0} \\ \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{E} = -\nabla \phi \\ \nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f + \rho_P}{\varepsilon_0} (= \frac{\rho_f}{\varepsilon}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}) \end{array} \right.$$

静磁场

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \\ \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{H} = -\nabla \phi_m \\ \nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \end{array} \right.$$

4.应用举例

求磁化矢量为 M_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。

解：铁球内和铁球外两均匀区域。在铁球外没有磁荷。在铁球内由于均匀磁化，则有 $\vec{M} = \vec{M}_0$,

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0,$$

4.应用举例

求磁化矢量为 M_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。

解：铁球内和铁球外两均匀区域。在铁球外没有磁荷。在铁球内由于均匀磁化，则有 $\vec{M} = \vec{M}_0$,

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0,$$

故此，磁荷只分布在球面上。取求外磁标势 φ_1 ,球内磁标势 φ_2 ,则

4.应用举例

求磁化矢量为 M_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。

解：铁球内和铁球外两均匀区域。在铁球外没有磁荷。在铁球内由于均匀磁化，则有 $\vec{M} = \vec{M}_0$,

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0,$$

故此，磁荷只分布在球面上。取球外磁标势 ϕ_1 ,球内磁标势 ϕ_2 ,则

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = 0.$$

4.应用举例

由于 $r \rightarrow \infty$, φ_1 需有限, 可知

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

4.应用举例

由于 $r \rightarrow \infty$, φ_1 需有限, 可知

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

当 $r \rightarrow 0$, φ_2 需有限, 则

$$\varphi_2 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta).$$

4.应用举例

由于 $r \rightarrow \infty$, φ_1 需有限, 可知

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

当 $r \rightarrow 0$, φ_2 需有限, 则

$$\varphi_2 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta).$$

而球面边界条件为

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \vec{n} \cdot \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2 \right) = -\vec{M}_0 \cos \theta \end{aligned}$$

4.应用举例

$$\sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) = - \sum_n na_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) + M_0 P_1(\cos \theta),$$

$$\sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_n na_n R_0^n P_n(\cos \theta)$$

4.应用举例

$$\sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) = - \sum_n na_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) + M_0 P_1 \cos \theta),$$

$$\sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_n na_n R_0^n P_n(\cos \theta)$$

比较 $P(n)$ 系数可得:

$$a_1 = \frac{1}{3}M_0, b_1 = \frac{1}{3}M_0 R_0^3.$$

$$a_n = b_n = 0, n \neq 1.$$

4.应用举例

故此,

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3 \cos \theta}{3 R^2} = \frac{R_0^3 \vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{3 R^3},$$

4.应用举例

故此,

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3 \cos \theta}{3 R^2} = \frac{R_0^3 \vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{3 R^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} M_0 R \cos \theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}.$$

4.应用举例

故此,

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3 \cos \theta}{3 R^2} = \frac{R_0^3 \vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{3 R^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} M_0 R \cos \theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}.$$

球内磁场为: $\vec{H} = -\nabla \varphi_2 = -\frac{1}{3} \vec{M}_0,$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_0) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0.$$