# 第二章 极限与连续

**1.“数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示$n$充分大后，$x_n$越来越接近于$a$”，这种结论对吗？**

答：这种说法不妥。因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示当$n$无限增大时，$|x_n-a|$趋于零。而“$x_n$越来越接近于$a$”一般理解为$|x_n-a|$单调减少，单调减少不一定趋于零，而$|x_n-a|$趋于零也不要求$|x_n-a|$单调减少。

**2. 如何证明数列$\{x_n\}$发散。**

答：证明数列$\{x_n\}$发散，通常可采用以下两种方法。

(1) 由极限的唯一性可知若能找到$\{x_n\}$的两个有不同极限的子列，则$\{x_n\}$是发散的。

(2) 若能找出$\{x_n\}$的一个发散子列，则$\{x_n\}$发散。

**3. 在定义极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$时，为何要限定$0<|x-x_0|<\delta$，将此改成$|x-x_0|<\delta$是否可以？**

答：不可以。$x\to x_0$表示是$x$越来越接近$x_0$的一个变化趋势，但$x$永远不到$x_0$。因此极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x)$在$x_0$这点函数取值的情况毫不相干，甚至可以在$x_0$没有定义。而“$|x-x_0|<\delta$”包含了$x=x_0$。因此与极限概念是有差别的。

**4. 数列极限与函数极限有什么关系？有些什么应用？**

答：由归结原理，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$任意趋于$x_0$的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}=x_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。一般可有下列应用（在归结原理中将$x_0$改成$\infty$也同样成立。在应用中同样如此）。

(1) 证明极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，只需找一数列$\{x_n\}$ $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$且$x_n\neq x_0$，数列$\{f(x_n)\}$发散；或找出两个数列$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$ $x_n\to x_0$，$x_n'\to x_0$ $(n\to\infty)$. $x_n\neq x_0, x_n'\neq x_0$，数列$\{f(x_n)\}$和$\{f(x_n')\}$有不同的极限。

$(2)$ 为求极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$，可先找一数列 $\{x_n\}$， $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$， $x_n \ne x_0$ 。求出 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$，然后证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，本教材中证重要极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 用的就是这种方法。

$(3)$ 为求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$，若能求得 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 即可得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = A$。

**5. 使用极限四则运算法则时应注意什么问题？**

答：要注意满足四则运算法则成立的前提条件。例如以下计算过程就不正确。

$(1)\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\sqrt{n+1} - \lim\limits_{n \to \infty}\sqrt{n} = \infty - \infty = 0$

$(2)\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{n}\sin n = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{n}\lim\limits_{n \to \infty}\sin n = 0$

这两题都违反了四则运算法则中要求极限必须存在的条件。这里 $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt{n+1}$, $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt{n}$, $\lim\limits_{n \to \infty}\sin n$ 都不存在。

$(3)\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{n+1} + \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{n+2} + \cdots + \lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{n+n} = 0$

这题中相加后项有 $n$ 个，而 $n \to \infty$，所以不能看作是有限个数列之和，因此其过程不对。

**6. 在条件 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$， $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$ 之下，能否推出**

$$\lim_{x \to x_0} f\left[g(x)\right] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A ?$$

答：不一定。例 设 $u = g(x) = x\sin\dfrac{1}{x}\ (x \ne 0)$. $f(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ 1, & u \ne 0 \end{cases}$

则 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = 1$

但 $f\left[g(x)\right] = \begin{cases} 0 & x = \dfrac{1}{n\pi} \\ 1 & x \ne \dfrac{1}{n\pi} \end{cases} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

显然 $\lim\limits_{x \to 0} f\left[g(x)\right]$ 不存在。

若在条件中再加上“ $x \ne x_0$ 时， $g(x) \ne u_0$ ”这时就有 $\lim\limits_{x \to x_0} f\left[g(x)\right] = A$。

**7. 在求用递推公式给出的数列极限时，可不可以直接在递推公式两端取极限而求得其极限？**

例如教材中例 2.1.12 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ 。设 $\{x_n\}$ 极限为 $a$，两边取极限得 $a = \sqrt{2+a}$，可解

得$a=2$，而不是去验证$\{x_n\}$的收敛性？

答：在求此类级数极限时先验证$\{x_n\}$的收敛性是必不可少的。因若级数$\{x_n\}$发散，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$就不表示一个数。在递推公式两端取极限就失去了依据，由此得到的等式就更没有了意义。例设 $x_1=1,\quad x_{n+1}=-x_n$，显然$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在。但若设其极限为$a$，两边取极限后可得 $a=-a \Rightarrow a=0$ 于是得到错误结果。

**8. 无穷大量与无界变量有何差别？**

答：无穷大量的定义是：变量在某变化趋势中，对任意大的$M>0$，存在某时刻，在此时刻之后，变量值的绝对值大于$M$。这里要求变量值的绝对值在此时刻后永远大于$M$。

而无界变量不在某特定变化趋势中考察变量。对于任意大的$M>0$，只要有一个变量值的绝对值大于$M$，此变量就是无界变量。

**9. 在求极限时，能否对分子或分母中某个加项作等价无穷小代换？**

答：不可以。由教材定理 2.3.4 知，作等价无穷小代换时，必须将分子或分母的整体分别换成它们各自的等价无穷小。如果分子（或分母）为若干因子的乘积，则对其中一个或若干个无穷小的因子作等价无穷小代换，亦可得证所得的新分子（或新分母）的整体与原来分子（或分母）的整体是等价无穷小。

但对分子（或分母）中某个加项作等价无穷小代换，就不能保证代换后的新分子（新分母）与原来分子（或分母）是等价无穷小。教材中的例 2.3.5 的（3）可以说明这一问题。

**10. 关于初等函数连续性的结论，为什么表述成“初等函数在其定义区间内都是连续的”而不是说成是“初等函数在其定义域内都是连续的”？**

答：由连续函数的运算法则可知，如果$x_0$ 在初等函数$f(x)$的某个定义区间内，则$f(x)$在该点必连续。因此初等函数在其定义区间内是连续的。

但定义函数在一点处连续的前提条件是函数在该点的某个邻域内有定义。例如，初等函数$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x(x-1)}$，它的定义域$D=[1,+\infty)\cup\{0\}$，在$x=0$处就无法定义其连续性，因此我们不能说$f(x)$在其定义域$D$上连续，只能说$f(x)$在其定义区间$[1,+\infty)$上是连续的。

**11. 关于闭区间上连续函数性质定理，若将其条件中闭区间改为无穷区间，那么相应的结论还能成立吗？**

答：一般来说，对于无穷区间这些性质就不一定成立了。例$f(x)=x$在$(-\infty,+\infty)$上连续，它在该区间既无上界又无下界，也没最大值和最小值。但若适当增加些条件，则还能使这些性质成立，例：

(1) 对有界性定理，可以这样增加条件：

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有

界。

$(2)$ 对最大、最小值定理，可以这样增加条件：

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在，且存在 $a,b$，$f(a)$ 大于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$f(b)$ 小于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必取得最大值和最小值。

$(3)$ 对于根的存在定义，可以将条件改为：

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在且异号，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必存在零点。