第 11 章 无穷级数

1. 能用加括号的方法来判别级数的敛散性吗？

答：由收敛级数性质知，收敛级数加括号后得到的级数也收敛，因此若加括号后的级数发散，则原级数也发散，不然要引起矛盾。但若加括号级数收敛。则一般不能断定原级数收敛。

不过当级数是正项级数时，加括号级数与原级数有相同的敛散性。这是因为正项级数收敛的充要条件是部分和数列有界，显然对正项级数来说，加括号后的级数与原级数部分和数列是否有界是一致的。

2. 发散级数加发散级数一定发散吗？

答：不一定。一个简单的例子：任一发散级数，每项乘以-1后仍为发散级数，这两级数相加后显然收敛于零。但若一级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，另一级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$一定发散。不然，根据收敛级数性质可知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}[(u_n+v_n)-v_n]$收敛，这与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散相矛盾。

3. 比式判别法与根式判别法使用范围一样吗？它们各有什么优点？

答：一般来说，根式判别法使用范围比比式判别法使用的范围更广一些。这是因为若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则必有$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$。而当$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在时，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$却可能存在。例如正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$。显然$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在。但$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}$，但有时比式判别法使用起来方便些，尤其是一般项中有$n!$的形式。此时用比式判别法往往可将$\frac{u_{n+1}}{u_n}$约简到较易求极限的形式。

4. 交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)$，若$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，是否隐含当 n 充分大时$u_{n+1}\le u_n$，这样不就变得只要$\lim_{n\to\infty}u_n=0$就可判别$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛了吗？

答：$\lim_{n\to\infty}u_n=0$并不隐含 n 充分大时$u_{n+1}\le u_n$，因此这一条并不能判定交错级数收敛。例如：交错级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=0$，而

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\cdot\frac{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1})$$

易知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散，故原级数发散。

5. 我们知道$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛，那对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$，$1+\frac{1}{n}>1$是否能断定$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$收敛呢？

答：不能。因p级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$中的$p$是一确定的常数。而$1+\frac{1}{n}$随 n 而变。事实上，因

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散故由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$是发散的。

6. 对一般级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$是通过比式或根式判别法得出是发散的，是否能断定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散？

答：是可以的。因为在$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}$大于 1 时，显然其一般项$u_n$不趋于零。

7. 在求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛半径时，若极限$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$不存在怎么办？

答：当$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$不存在时，可通过求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$来求幂级数的收敛半径。例如对于幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$不存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{n}}=1$，故收敛半径为 1。当$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$都不存在时，比如有“缺项”的幂级数，则可用一般项的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$求收敛域的方法进行讨论。例：级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{\text{后项}}{\text{前项}}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}}|=|x^2|<1$，故

$-1 < \mathrm{x} < 1$。所以它的收敛半径 R=1。

8. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别是 R_1 和 R_2，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $\mathrm{R} = \min\{\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2\}$ 吗？

答：不一定。例如 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} -x^n$ 收敛半径都为 1，但 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0$ 的收敛半径 R 为 $+\infty$，一般来说 $\mathrm{R} \ge \min\{\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2\}$。

9. 幂级数与其逐项求导或逐项积分后的幂级数有相同的收敛域吗？
答：幂级数与其逐项求导或逐项积分后的幂级数有相同的收敛半径，但不一定有相同的收敛域，即端点的敛散情况可能有所不同，一般来说逐项积分后级数的收敛域不会缩小，逐项求导后级数的收敛域不会扩大。

10.间接展开法与直接法求出的泰勒级数展开式一定一样吗？
答：一定一样，其理论根据是函数的幂级数展开式是唯一的。

11. 将函数 $f(x)$ 展开成付里叶级数时应注意什么？

答：首先应注意 $f(x)$ 是否满足收敛定理条件，然后应注意函数 $f(x)$ 的周期是什么，是奇函数还是偶函数。若 $f(x)$ 周期为 $2l$，则构成付里叶级数的三角函数系就是 $\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \ldots\}$，周期不一样。付里叶系数的计算形式和付里叶级数的形式也都要发生变化。若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\cos\frac{n\pi}{l}x$ 的系数 a_n 及 a_0 可不必计（肯定为零），若 $f(x)$ 是偶函数，则 b_n 可不必计算。最后在写出结果时，可用“~”表示 $f(x)$ 的付里叶级数 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x)$。若“~”号写成等号，则必须明确地指出其余式成立的范围，即 $f(x)$ 的全体连续点集合，只在这范围的等式成立。