微分方程基本概念

授课人：刘兴波
E-mail: **xbliu@math.ecnu.edu.cn**

一 基本概念

1. 微分方程：含有自变量, 未知函数与它们的导数(或微分)之间关系的等式称为微分方程.

2. 常微分方程与偏微分方程

只含一个自变量的微分方程称为常微分方程

(ordinary differential equation),

自变量多于一个的微分方程称为偏微分方程 **(partial differential equation).**

例如：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1, \tag{1.1}$$

$$y=xy'+\varphi(y'), \tag{1.2}$$

$$(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=0, \tag{1.3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f_1(t,x,y)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f_2(t,x,y)\end{cases}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1.5}$$

注1：本教程中在不会混淆时简称``常微分方程 “为``微分方程"甚至简称为``方程".

注2：一个微分方程可以形式上不含自变量与未知函数，但必须含有未知函数的导数(或微分形式)，否则就不能称为微分方程。

3 微分方程的阶数

在微分方程中, 必定含有未知函数的导数, 其中出现的最高阶数就称为该微分方程的阶数;

一般 n 阶常微分方程可写成如下隐方程形式

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

其中 F 是其变元的已知函数.

但在实际中常常讨论最高阶导数已解出的标准形式

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$$

即方程的左边是未知函数的最高阶导数 (n 阶导数), 而方程的右边为自变量、未知函数和未知函数低于 n 阶的导数的已知函数.

4. 线性和非线性：

如果在方程中的函数 F 关于未知函数 y 及其各阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$是一次有理整式, 则称方程是线性的**(linear)**

n 阶线性方程的一般形式是

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中 $a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 和 $f(x)$ 都是自变量 x 的已知函数.

而 n 维一阶线性常微分方程组的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)$$

其中 $\mathbf{f}(t)$ 是 n 维已知的函数列向量, $\mathbf{x}$是 n 维列向量, $\mathbf{A}(t)$ 是 n 阶已知的函数方阵.

不是线性的微分方程就称为非线性方程.

例如,方程(1.1), (1.3), (1.5)都是线性方程, 而方程(1.2), (1.4)一般来说是非线性的(nonlinear).

注1：判别一个微分方程是否线性，只要看其未知函数及其各阶导数是否一次的即可，不需要考虑自变量的影响

5. 微分方程的解：

如果把已知函数 $x=\varphi(t)$ 或函数矢量 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 及其导函数代入相应的微分方程, 使得该微分方程在函数 $\varphi(t)$ 或函数矢量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的定义区间 I 上成为恒等式, 则称这种函数 $\varphi(t)$ 或函数矢量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 为微分方程在区间 I 上的(显式)解.

这个区间 I 称为微分方程的解的定义区间.

注1：同一个微分方程可以有不同的解, 不同的解的定义区间可以不同.

注2：由定义可见解函数的定义区间 I 的长度一定大于零, 不然解函数的导数就没有意义.定义区间可能是开区间, 闭区间, 或半开半闭区间.

若方程的解是由隐函数决定的, 则称之为隐式解. 若方程的解是由参数形式表示的, 则称之为参数形式解.

6. 通解、初值问题和特解:

考虑 n 阶方程 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$.

如果在它的解

$$x = \varphi(t, c_1, \ldots, c_n)$$

中含有 n 个独立的任意常数 $c_1, \ldots, c_n$, 则称这个解为 方程 的通解.

如果方程的解中不包含任意常数，则称它为方程的特解

注1：通解不一定包含了方程所有的解;

例如 可以验证 $x = ct - c^2$ 是方程 $x = tx' - x'^2$ 的通解,

其中 c 为任意常数;这个方程还有一个解 $x = t^2/4$ 就不包括在它的通解中.

注2：任意常数的相互独立性.

由于微分方程的通解总含有任意常数, 因此为了确定它的某个特定的解, 还必须给出该解所应满足的条件,

求满足给定条件的解的问题称为定解问题, 给出的这种条件就称为定解条件.

我们在本书中只考虑初始问题。 初值问题中解要满足的条件称为初始条件

初值条件是指当自变量在某一给定点时, 未知函数以及它的低于方程阶数的导函数在该点应取给定的数值.

n 阶方程的初始条件(initial condition):

当 $x = x_0$ 时,

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

其中 $y_0, \quad y_0', \quad \cdots, \quad y_0^{(n-1)}$ 是预先给定的 n 个常数.

于是 n 阶微分方程的初值问题 (initial value problem):

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

例如可以验证 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ 是二阶方程 $x'' + x = 0$ 的通解. 因此不难求出 $x'' + x = 0$满足初始条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 的特解为 $x = \cos t$.

二、 一阶方程解的几何意义

1. 积分曲线

设D 为 x , y, 平面上的区域， 考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

设函数 $y = \varphi(x)$ 为系统 的一个特解, 这函数在 x,y 平面上的图像是 D中的一条曲线, 我们称它为方程 的一条积分曲线.

设方程的通解是 $y = \varphi(x, c)$, 当其中任意常数 c 在某一实数集中取值时, 就得到 D中的积分曲线的集合, 我们称它为积分曲线族.

方程满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的特解就是通过点 $(x_0, y_0) \in D$ 的积分曲线.

注：解和积分曲线的关系？

曲线 l 是方程的积分曲线的充要条件是: 其上每一点处的斜率恰好等于函数 $f(x,y)$ 在该点的值.

证明：在 方程 的积分曲线上任一点 $(x,\varphi(x))$ 处, 其切线斜率 $\varphi'(x)$ 正好等于函数f (x, y) 在该点处的值 $f(x,\varphi(x))$，即 $y=\varphi(x)$ 满足方程，在区间 I 上有恒等式

$$\varphi'(x) \equiv f(x,\varphi(x))$$

反之, 如果对于 D 中的任一条光滑曲线 $y=\varphi(x)$, 在它上面任一点处的切线斜率 $\varphi'(x)$ 刚好就是函数f (x, y) 在该点处的值 $f(x,\varphi(x))$

则此曲线就是方程的**积分曲线**.

2. 方向场

在 $\mathbf{D}$ 中每一点 (x, y) 处画上斜率为 $f(x, y)$ 的一个“小直线段”，

我们把每一点处都具有这种“小直线段”的区域 $\mathbf{D}$ ，称为微分方程

的方向场 **(direction field).**

给定一个微分方程, 它的几何意义就是确定了区域 $\mathbf{D}$ 的方向场.

注：积分曲线上的每一点的切线方向和方向场在该点的方向一致. 因此

可以从方向场出发近似地画出方程的积分曲线.