第六讲、线性微分方程常数变易法与一阶隐式方程 1

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 进一步了解和掌握线性微分方程的本质特征和性质
- 掌握线性微分方程的一个新解法：常数变易法
- 一阶隐式方程的解法–y 可解出的方程.

回顾与设问: 线性微分方程

- 回顾线性微分方程的解法和通解。
- 线性微分方程是否有其它有效的解法？
- 从通解可以进一步得到线性微分方程解的哪些本质特性？

线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

其中 $p(x), q(x)$ 在开区间 (α,β) 上连续

- 当 $q(x)\equiv 0$ 时, 称 (1) 为**线性齐次方程.**
- 当 $q(x)\neq 0$ 时, 称 (1) 为**线性非齐次方程.**

注： 线性微分方程在实际生活中大量地用到, 比如 RL 回路电流方程

$$L\frac{dI}{dt}(t)+RI(t)=E(t),$$

就是线性微分方程, 其中

- L 是电感, R 是电阻
- $I(t)$ 是电路的电流, $E(t)$ 是电源的电压.

线性微分方程的新解法：常数变易法

首先利用变量分离法求线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \tag{2}$$

的通解

$$y=ce^{-\int p(x)dx}, \quad 其中 c 是任意常数.$$

其次将任意常数 c 换成关于 x 的函数 $c(x)$ 得

$$y(x)=c(x)e^{-\int p(x)dx},$$

并将 $y(x)$ 代入方程 (1), 通过化简得

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x).$$

所以

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c, \quad \text{其中 } c \text{ 是任意常数.}$$

故线性非齐次方程 (1) 的通解为

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

其中 c 是任意常数.

方法对比： 试比较两种方法求解线性微分方程的优越？

问题： 线性微分方程通解的公式是用不定积分表示。

- 如何用定积分表示线性微分方程的通解？
- 线性微分方程初值问题的解如何表示？

附注:

- 对于 $x_0 \in (\alpha, \beta)$, 线性微分方程 (1) 满足初始条件

$$y(x_0) = y_0$$

的解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds}dt\right), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

- 线性方程 (1) 的通解也可用定积分来表示

$$y = c\,e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x}^{t} p(s)ds}dt,$$

其中 $x_0 \in (\alpha, \beta)$ 是任意取定的点, c 是任意常数.

思考: 从通解可以得到线性微分方程解的哪些进一步的信息?

由上述通解和初值问题解的表达式, 容易得到

命题 9

- 线性齐次方程 (2) 的解或者恒等于零或者恒不等于零;
- 线性方程 (1) 的解在 $p(x), q(x)$ 连续的区间 (α, β) 上存在且连续;
- 线性齐次方程 (2) 解的任意线性组合仍是 (2) 的解;
- 线性齐次方程 (2) 的解与非齐次方程 (1) 的解的和仍是 (1) 的解;
- 线性方程 (1) 两个解的差是 (2) 的解;
- 线性微分方程 (1) 的初值问题的解存在唯一.

目的： 讨论线性微分方程周期解的存在性与解的极限性质。

例 1: 设 $a>0, f(x)$ 是连续的 2π 周期函数, 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x), \tag{3}$$

的周期解.

解: 方程 (3) 的通解为

$$y(x)=ce^{-ax}+\int_0^x f(s)e^{a(s-x)}ds. \tag{4}$$

首先证明: $y(x)$ 是 2π 周期解 $\Longleftrightarrow$ $y(2\pi)=y(0)$.

- 必要性是显然.

- 充分性. 令
$$z(x)=y(x+2\pi).$$
则

$$\frac{dz}{dx}(x)=\frac{dy}{dx}(x+2\pi)=-ay(x+2\pi)+f(x+2\pi)=-az(x)+f(x).$$

这就证明了 $z(x)$ 也是方程 (3) 的解.
又 $z(0)=y(2\pi)=y(0)$, 由线性方程初值问题解的唯一性得
$$y(x+2\pi)=z(x)=y(x).$$

所以要找周期解，只需找满足 $y(2\pi)=y(0)$ 的解。

由通解的表达式, 从 $y(2\pi)=y(0)$ 解得

$$c=\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_0^{2\pi} f(s)e^{as}ds.$$

故方程 (3) 有唯一的周期解

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{e^{2a\pi}-1}\times \\
&\quad \left(\int_0^{2\pi} f(s)e^{a(s-x)}ds+\int_0^{x} f(s)e^{a(2\pi+s-x)}ds-\int_0^{x} f(s)e^{a(s-x)}ds\right) \\
&= \frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} f(s)e^{a(s-x)}ds.
\end{aligned}$$

例题 2 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. 求证

(a) 当 $a>0$ 时, 方程 (3), i.e.

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x),$$

的所有解当 $x\to\infty$ 时的极限都是 $\frac{b}{a}$.

(b) 当 $a<0$ 时, 方程 (3) 只有一个解当 $x\to\infty$ 时的极限是 $\frac{b}{a}$.

证:

(a) 由方程 (3) 通解的表达式 (4), i.e

$$y(x) = ce^{-ax} + \int_0^x f(s)e^{a(s-x)}ds.$$

方程 (3) 的任一解 $y(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续可微. 所以有

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}y(x)}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)+ay(x)}{a} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a} = \frac{b}{a},$$

其中

- 第二个等式用了 Hospital 法则,
- 第三个等式用到 $y(x)$ 是方程 (3) 的解.

(b) 当 $a<0$ 时, 由假设得积分 $\int_0^\infty f(s)e^{as}ds$ 收敛. 在通解 (4) 中, 令

$$c=c_0-\int_0^\infty f(s)e^{as}ds.$$

则通解可以写成

$$y(x)=e^{-ax}\left(c_0+\int_\infty^x f(s)e^{as}ds\right).$$

所以由 Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{c_0+\int_\infty^x f(s)e^{as}ds}{e^{ax}}=\begin{cases}\frac{b}{a}, & c_0=0,\\ \infty(-\infty), & c_0\neq 0.\end{cases}$$

从而当 $a<0$ 时方程 (3) 只有解

$$y(x)=\int_\infty^x f(s)e^{a(s-x)}ds$$

当 $x\to\infty$ 时的极限是 $\frac{b}{a}$.

练习：

求方程

$$xy' = y + x,$$

的通解, 并求出解当 $x \to 0$ 时的极限.

总结：

- 重点是常数变易法和解的性质。通过实例训练学生掌握。
- 难点是周期解和解的极限性质。这方面的相关内容较多，不同问题处理手段也不尽相同。需要多联系和训练

思考探索题：

- 例 1 中，如果 $a < 0$ 或 $a = 0$ 是否有周期解?
- 例 2 中，代替极限存在，只要求 $f(x)$ 连续有界，问可以得到解的哪些性质?

作业： 习题一 13, 15, 17, 19 (线性方程常数变易法部分)

一阶隐式微分方程的求解方法

回顾： 隐式微分方程，以及与显示微分方程的区别和联系

考虑一阶隐式方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{5}$$

的求解方法.

问题： 隐式微分方程如何求解？能用显示方程的方法求解吗？

1. y 可解出的方程

设方程 (5) 可写成

$$y = f(x,p), \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

其中 $f(x,p)$ 连续可微.

将 p 作为新的因变量, 对方程 (6) 两边关于 x 求导, 得到 p 关于 x 的导数的显示方程

$$(f_x(x,p) - p)dx + f_p(x,p)dp = 0. \tag{7}$$

- 若方程 (7) 有通解 $p = u(x,c)$, 则方程 (6) 有通解

$$y = f(x,u(x,c)), \qquad \text{其中 } c \text{ 是任意常数}.$$

对特解有类似的结论.

- 若方程 (7) 有通解 $x=v(p,c)$, 则方程 (6) 有含参数 p 的通解

$$\begin{aligned} x&=v(p,c),\\ y&=f(v(p,c),p), \end{aligned}$$ 其中 c 是任意常数.

对特解有类似的结论.

强调注意的问题:

- 不能对 $y'(x)=u(x,c)$ 求积分得到 y, 因为这样得到的 y 不一定是原方程的解.
- 下面 Clairaut 方程的例子将说明这一点.

该问题在历届学生中都容易出现!

例 1: 求解 Clairaut 方程

$$y = xp + f(p), \qquad p = \frac{dy}{dx},\ f''(p) \neq 0.$$

解: 对 Clairaut 方程两边关于 x 求导得

$$(x + f'(p))\frac{dp}{dx} = 0.$$

- 由 $\frac{dp}{dx} = 0$ 得到 Clairaut 方程的通解

  $$y = cx + f(c),$$

  其中 c 是任意常数. 注意: Clairaut 方程的通解由一族直线构成.
- 由 $x + f'(p) = 0$ 得到 Clairaut 方程的特解

  $$x = -f'(p), \quad y = xp + f(p),$$

  其中 p 是参数.

进一步地, 因 $f''(p) \neq 0$, 运用隐函数存在定理从

$$x = -f'(p)$$

解出

$$p = \omega(x).$$

则 Clairaut 方程的特解可写成

$$y = x\omega(x) + f(\omega(x)). \tag{8}$$

思考: Clairaut 方程在常微分方程基础理论中占有重要的地位。

- Clairaut 方程的特解与通解的关系如何?

Clairaut 方程的特解与通解的关系如下：

- 过 Clairaut 方程特解上任一点的切线是通解中的一条直线.
事实上, 设 $(x_0, y(x_0))$ 是特解 (8) 上的任一点, 则
有 $y'(x_0) = \omega(x_0)$. 所以特解过 $(x_0, y(x_0))$ 的切线方程为

$$y - y(x_0) = \omega(x_0)(x - x_0),$$

即

$$y = c_0 x + f(c_0), \qquad c_0 = \omega(x_0).$$

- 特解 (8) 不能用通解表示, 因为 $\omega(x)$ 不是常数. 事实上,
从 $x + f'(\omega(x)) \equiv 0$ 得

$$\omega'(x) = -\frac{1}{f''(\omega(x))} \neq 0.$$

- 上述两点说明 Clairaut 方程特解对应的积分曲线上任一点都
有通解中的一条积分曲线通过, 且两者在该点相切.

Clairaut 方程是法国数学家 Alexis Clairaut 于 1734 年引入的.

Alexis Clairaut (3 May 1713–17 May 1765) was a prominent French mathematician, astronomer, and geophysicist.

- His paper procured his admission into the French Academy of Sciences in 1731, although he was below the legal age as he was only eighteen.
- He was elected a Fellow of the Royal Society of London in 1737.

特别是在天文学的研究方面做出了杰出的贡献：

- He obtained an ingenious approximate solution of the problem of the three bodies
- In 1750 he gained the prize of theSt Petersburg Academy for his essay Théorie de la lune
- In 1759 he calculated the perihelion(近日点) of Halley's comet.

讨论+思考: 在 Clairaut 方程中

通过 $f(x)$ 的适当选取可以得到特解的哪些可能的几何形状?