第二十四讲、平面常系数线性微分方程组的局部结构与Mathematica作图

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 了解和掌握平面定性分析的基本方法
- 熟悉Mathematica作常微分方程的局部相图

回顾：

常系数齐次线性微分组基解矩阵的求法

微分方程解的几何结构的例子

给出平面微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = 2x, \qquad \frac{dy}{dt} = -3y$$

解的局部结构.

解： 分别解两个方程得

$$x = c_1 e^{2t}, \qquad y = c_2 e^{-3t}.$$

由此可得两个方程的联立方程, i.e.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{-3y}$$

的通解

$$x^3 y^2 = c, \qquad \text{其中}c\text{是任意常数}$$

利用这些解的表达式画出所有轨线, 及其运动方向.

作为常系数线性齐次微分方程组解法的应用，本讲讨论平面常系数线性微分方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \qquad (1)$$

在奇点 $(0,0)$ 邻域轨线的局部结构，其中 $\mathbf{0}$ 表示 2 阶零矩阵.

定义：

- 点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 称为方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y),$$

的**奇点**，如果 $P(x_0,y_0) = 0$, $Q(x_0,y_0) = 0$.

- 奇点 (x_0, y_0) 称为**初等奇点** (或**高阶奇点**), 如果 Jacobi 矩阵

$$\left.\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)},$$

的特征值至少有一个不为零 (或都为零).

- 初等奇点 (x_0, y_0) 称为**非退化的**, 如果 Jacobi 矩阵

$$\left.\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)},$$

的特征值都不为零. 否则称为**退化的**.

- 非退化初等奇点 (x_0, y_0) 称为**双曲的**, 如果 Jacobi 矩阵

$$\left.\frac{\partial(P,Q)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)},$$

的特征值的实部都不为零. 否则称为**非双曲的**.

平面常系数线性微分方程组的分类

由 Jordan 标准型理论知, 存在实可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为下列 Jordan 标准型之一：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda, \mu, \beta \neq 0$. 容易验证, 通过变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

方程 (1) 可化为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

注： 由于线性变换只起到拉伸和旋转的作用, 不失一般性, 只讨论当 $\mathbf{A}$ 具有上述标准型之一时方程 (1) 在奇点 (0,0) 邻域的性质

导引: 什么是局部结构？如何分析？

(I) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

方程 (1) 的通解为

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\mu t},$$

其中 c_1, c_2 是任意常数. 因而, 方程组 (1) 的解可表示成

$$x = 0, \qquad \text{或} \quad y = c|x|^{\frac{\mu}{\lambda}},$$

其中 c 是任意常数.

1) $\lambda = \mu$. 方程 (1) 的解为

$$x = 0, \text{ 或 } y = cx, \text{ 其中 } c \text{ 是任意常数.}$$

方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图如??????

此时 $(0,0)$ 称为**临界结点** (双曲).

2) $\lambda \neq \mu, \lambda\mu > 0$.

当 $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ 时, 所有轨线 (除 $x = 0$ 外) 在原点处与 x 轴相切.

当 $\frac{\mu}{\lambda} < 1$ 时, 所有轨线 (除 $y = 0$ 外) 在原点处与 y 轴相切.

方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图如??????

此时 $(0,0)$ 称为**两向结点**, 或简称为**结点** (双曲).

- 当 $\lambda > 0$ 时, 称为**不稳定的结点**.
- 当 $\lambda < 0$ 时, 称为**稳定的结点**.

3) $\lambda\mu < 0$. 由于

$$\lim_{x\to\pm\infty} c|x|^{\frac{\mu}{\lambda}} = 0, \quad \lim_{x\to\pm 0} c|x|^{\frac{\mu}{\lambda}} = \infty,$$

所以方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图如??????

此时 $(0,0)$ 称为**鞍点** (双曲).

具有Jordan标准型（I）的平面系统轨线局部结构的总结:

- 除了临界结点外, 所有情况恰有两条直线解.
- x–轴是特征值 λ 对应的特征向量的方向.
- x–轴是方程组的直线解.
- y–轴是特征值 μ 对应的特征向量的方向.
- y–轴是方程组的直线解.
- 趋向原点的直线解对应于负特征值.
- 离开原点的直线解对应于正特征值.
- 无穷条轨线与之相切的直线解对于绝对值小的特征值.

A 非 Jordan 标准型性, 但其 Jordan 标准型具有（I）,如何作图:

- 计算特征值 λ_1, λ_2, 及对应的特征向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.
- 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 则原点是临界结点当且仅当 $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$.
- 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 原方程恰有两条直线解 $e^{\lambda_1 t}\mathbf{r}_1$ 和 $e^{\lambda_2 t}\mathbf{r}_2$
- 如果 $\lambda_1(\lambda_2) < 0$, 随着时间的增加直线解趋于原点.
- 如果 $\lambda_1(\lambda_2) > 0$, 随着时间的增加直线解远离原点.
- 无穷条轨线与之相切的直线解对应于特征值的绝对值小的那个.

例子:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{其中} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ or } A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(II) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$.

方程 (1) 的解为

$$x=0, \qquad \text{或} \quad y(x)=cx+\frac{x}{\lambda}\ln|x|,$$

其中 c 是任意常数. 又

$$\lim_{x\to0}y(x)=0, \quad \lim_{x\to0}\frac{dy(x)}{dx}=c+\frac{1}{\lambda}\ln|x|+\frac{1}{\lambda}=\begin{cases}-\infty, & \lambda>0,\\ \infty, & \lambda<0,\end{cases}$$

所以方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图为??????

此时 $(0,0)$ 称为**退化结点** (**或单向结点**) (双曲).

例子: A 非 Jordan 标准型, 有重根. 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

特征方程为:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

它有二重根: $\lambda = 1$. 因 A 非对角, 所以原点是退化结点或单向结点.

- 对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量是 $\mathbf{r} = (1,2)$. 相应的直线解 $e^t\mathbf{r}$.
- 检验轨线与 x 轴相交时 dy/dt 的符号
- 检验轨线与 y 轴相交时 dx/dt 的符号
- 利用这些轨线的运动方向可以判定出与直线解相切的方向

作出相图!

(III) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$.

通过极坐标变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 方程 (1) 化为

$$\frac{dr}{dt}=\alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt}=\beta.$$

它有解

$$r=c\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}\theta\right),$$

其中 c 是任意常数. 所以方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图为??????

进一步地,

- 当 $\alpha = 0$ 时, $r = c$, $(0,0)$ 称为**中心** (非双曲非退化).

  此时 $(0,0)$ 的邻域充满了周期轨道.

- 当 $\alpha > 0$ 时, $(0,0)$ 称为**不稳定的焦点** (双曲).

  此时 $(0,0)$ 邻域的轨道当 t 增加时都盘旋地离开该奇点.

- 当 $\alpha < 0$ 时, $(0,0)$ 称为**稳定的焦点** (双曲).

  此时 $(0,0)$ 邻域的轨道当 t 增加时都盘旋地逼近该奇点.

例子: A 非 Jordan 标准型, 有共轭复根. 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 或 \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

特征方程为:

$$\lambda^2-4\lambda+5=0 \quad 或 \quad \lambda^2+1=0$$

它有一对共轭复根:

$$\lambda=2\pm\mathbf{i} \quad 或 \quad \lambda=\pm\mathbf{i}.$$

利用

- 原点是不稳定的焦点或中心.
- 轨线与 x 轴相交时 dy/dt 的符号

可以作出相图!

(IV) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 此时 y 轴上的点都是奇点.
- 它们都是退化初等奇点.
- y 轴上的奇点都称为**法向双曲的**.

方程 (1) 的通解为

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \qquad y = c_2,$$

其中 c_1, c_2 是任意常数. 所以方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图为??????

例子: A 非 Jordan 标准型, 有一个零特征根.
A 的行列式一定为零. 例如设

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

特征方程为:

$$\lambda^2 - 7\lambda = 0$$

它有根:

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 0.$$

利用变化

$$u = 3x + y, \quad v = x - 2y$$

及直线 $3x + y = 0$ 和 $x - 2y = 0$ 即可画出相图.

(V) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

此时 y 轴上的点仍都是奇点. 它们都是高阶奇点.

方程 (1) 的通解为

$$x = c_1, \qquad y = c_1 t + c_2,$$

其中 c_1, c_2 是任意常数. 所以方程组 (1) 的解在 $(0,0)$ 的局部结构图为?????

上述情况的分析总结

定理 49

记 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=\lambda^2+p\lambda+q$, 其中 $p=-\mathrm{tr}\mathbf{A}=-(a+d)$, $q=\det\mathbf{A}=ad-bc$. 方程 (1) 的原点有下列性质.

(a) $q<0$ ($\mathbf{A}$ 有两个异号特征根), $(0,0)$ 是鞍点;

(b) $q=0$ ($\mathbf{A}$ 有至少一个零特征根), $(0,0)$ 是高阶奇点;

(c) $q>0$, $p^2>4q$ ($\mathbf{A}$ 有两个不相等的同号特征根), $(0,0)$ 是结点;

(d) $q>0$, $p^2=4q$ ($\mathbf{A}$ 有两个相等的特征根), $(0,0)$ 是临界结点或退化结点;

(e) $q>0$, $0<p^2<4q$ ($\mathbf{A}$ 有一对实部不为零的特征根), $(0,0)$ 是焦点;

(f) $q>0$, $p=0$ ($\mathbf{A}$ 有一对纯虚特征根), $(0,0)$ 是中心.

课堂练习: **A** 不具有标准型时，作局部相图的进一步例子.

1. 二维微分系统
$$x' = x + y, \quad y' = 8x - y,$$
2. 二维微分系统
$$x' = 2x - 6y, \quad y' = 2x - 5y,$$

引伸与探讨: 上述是理论分析，能否有直观的作图分析?

用 Mathematica 求方程组的解和平面局部作图

下面通过简单的例子说明如何用 Mathematica 求解微分方程组，以及用 Mathematica 作平面微分方程组在奇点的局部图.

例题:

1. 用 Mathematica 求微分方程组通解

$$x'(t) = 2x - y, \quad y'(t) = x - 2y.$$

输入：

$\mathrm{DSolve}[\{x'[t] == 2x[t] - y[t], y'[t] == x[t] - 2y[t]\}, \{x[t], y[t]\}, t]$

Shift+Enter 输出结果

$\{\{x[t] \to$

$\frac{1}{6}e^{-\sqrt{3}t}(3 - 2\sqrt{3} + 3e^{2\sqrt{3}t} + 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}t})C[1] - \frac{e^{-\sqrt{3}t}(-1+e^{2\sqrt{3}t})C[2]}{2\sqrt{3}},$

$y[t] \to$

$\frac{e^{-\sqrt{3}t}(-1+e^{2\sqrt{3}t})C[1])}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}e^{-\sqrt{3}t}(-3 - 2\sqrt[3]{-}3e^{2\sqrt{3}t} + 2\sqrt{3}e^{2\sqrt{3}t})C[2]\}\}$

2. 用 Mathematica 求微分方程组初值问题的解

$$x'(t) = 2x - 3y + e^{-t}, \quad y'(t) = x - 2y + e^{2t}, \qquad x(0) = 1,\ y(0) = -1$$

输入：

DSolve$[\{x'[t] == 2x[t] - 3y[t] + \mathrm{Exp}[-t], y'[t] ==$
$x[t] - 2y[t] + \mathrm{Exp}[2t],$
$x[0] == 1, y[0] == -1\}, \{x[t], y[t]\}, t]$

Shift+Enter 输出

$\{\{x[t] \to -\frac{1}{4}e^{-t}(13 - 21e^{2t} + 4e^{3t} + 2t), y[t] \to \frac{1}{4}e^{-t}(-11 + 7e^{2t} - 2t)\}\}$

3. 用 Mathematica 作出平面微分方程

$$x'(t) = x - y, \qquad y'(t) = x + y,$$

在原点邻域的相图. 注：容易计算原点是一个焦点

输入：

$s1 = \mathrm{NDSolve}[\{x'[t] == x[t] - y[t], y'[t] == x[t] + y[t], x[0] ==$
$0.5, y[0] == 0.5\}, \{x[t], y[t]\}, \{t, -15, 15\}];$

$s2 = \mathrm{NDSolve}[\{x'[t] == x[t] - y[t], y'[t] == x[t] + y[t], x[0] ==$
$1.1, y[0] == 0.0\}, \{x[t], y[t]\}, \{t, -15, 15\}];$

$s3 = \mathrm{NDSolve}[\{x'[t] == x[t] - y[t], y'[t] == x[t] + y[t], x[0] ==$
$-1.1, y[0] == 1.1\}, \{x[t], y[t]\}, \{t, -15, 15\}];$

$\mathrm{ParametricPlot}[\{\mathrm{Evaluate}[\{x[t], y[t]\}/.s1], \mathrm{Evaluate}[\{x[t], y[t]\}/.s2], \mathrm{Evaluate}[$
$\{t, -15, 15\}, \mathrm{ImageSize} \to 500, \mathrm{PlotRange} \to \{-1.5, 1.5\}]$

Shift+Enter 即可输出三条轨线.

附注:

- 例 3 中划出了三条轨线. 如果希望通过更多的轨线来了解微分方程在原点邻域的结构, 可以取更多的初始点, 也可以将运算的时间取得长一些.
- 对于非线性系统, 也可以类似地用例 3 的算法作局图相图.
- 本例中提供了一种花局部相图的方法, 读者也可以探索其它的画法.

本讲重点：

- 简单平面方程组的局部结构分析和Mathematica作相图

本讲难点：

- 具体问题的局部结构分析

作业： 习题四 17.2， 17.3， 17.6， 17.8， 17.13.
用Mathematica作出五类不同类型的平面常系数线性微分方程的相图