第二讲、微分方程解的几何解释、存在和唯一性、实际模型的推导

张 祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 知识传授：
  - 从几何直观上认识解的含义、及解与微分方程的直观联系
  - 了解和熟悉保证微分方程解的存在、唯一性的条件
  - 具体问题如何建立数学模型
- 能力素质：
  - 培养学生学习常微分方程的几何直观性和空间想象能力
  - 实际问题的建模能力

回顾：

- 了解学生对微分方程的初步认识，以及对基本概念和知识的掌握.

引导分析：

- 解作为一个函数，它在空间的图是什么，从而引入解的几何解释.

1. 解的几何解释

- 考虑如下一阶微分方程

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{1}$$

其中 f 在 $\mathbb{R}^2$ 的某开区域 Ω 上连续.

- 设 $x = \phi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ 是方程 (1) 的一个解.

则 $\{(t,\phi(t)) : t \in (\alpha,\beta)\}$ 是 Ω 中的一条曲线, 称之为方程 (1) 的**积分曲线**.

设问：

- 积分曲线上点的切线的斜率与方程之间的关系如何？

回答：

- 积分曲线在其上任一点 $(t_0, \phi(t_0))$ 切线的斜率 $\phi'(t_0)$ 等于 $f(t_0, \phi(t_0))$.
- 这说明对于 Ω 中任一点 (t, x), 如果有积分曲线通过, 则通过该点的积分曲线的切线斜率为 $f(t, x)$.

几何解释的引伸：

- 对 $\forall (t,x) \in \Omega$, 过该点作斜率为 $f(t,x)$ 的小线段. Ω 中所有这些小线段的全体构成的集合称为方程 (1) 的 **线素场**.
- 线素场最直观的例子是条形磁铁周围的磁场：在一个细长的具有正负两极的条形磁铁周围撒上一些短小的铁针, 它们将按照磁场的方向在磁铁周围排列. 所有这些有规则排列的铁针就构成了一个磁场所满足的常微分方程的线素场. 本书不具体建立条形磁铁的磁场满足的方程, 有兴趣的同学可参见：丁同仁、李承治的常微分方程[p.16, 例3].

启发与思考：

- 对于给定的微分方程，线素场的作用如何？
- 线素场可以启发我们去思考微分方程的那些问题？

进一步理解：

- 即使不知道方程的解，也可以利用线素场近似地作出某些方程的积分曲线.
- 线素场在现代微分方程的发展中起了重要的作用，它是微分方程几何理论产生的基础元素。

例子：利用线素场作下列微分方程的积分曲线:

$$\frac{dy}{dx}=2,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{x}.$$

问题：通过解的定义与上一讲的例子，引导学生思考

- 给定 $(t_0,x_0)\in\Omega$, 方程 (1) 满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解是否存在？
- 如果初值问题的解存在, 那么解是否唯一？

注:

- 上述问题导入本讲的核心内容：解的存在唯一性定理
- 以后为方便起见, 将方程 (1) 满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解也说成方程 (1) 过初始点 (t_0,x_0) 的解, 或方程 (1) 过初始点 (t_0,x_0) 的积分曲线.

存在唯一性问题的历史回顾

上述问题在常微分方程的发展史上经历了很长的时间.

- 法国数学家 Augustin Cauchy (1789–1857) 于 19 世纪 20 年代建立了常微分方程初值问题解的存在唯一性定理 (正因为如此, 初值问题又称为 **Cauchy 问题**).
- 德国数学家 Rudolf Lipschitz (1832–1903) 于 1876 年减弱了 Cauchy 关于初值问题解的存在唯一性定理的条件.

- 后来法国数学家 Charles Émile Picard (1856–1941) 和 芬兰数学家 Ernst Lindelöf (1870–1946) 给出 Lipschitz 结果的新证明,
- 特别是 Picard 于 1893 年用逐次逼近法证明了 Lipschitz 定理 (后来的大多数教课书都用 Picard 的证明, 因此该定理又称为 **Picard 定理**, 或 **Cauchy–Lipschitz 定理**, 或 **Picard–Lindelöf 定理**).
- 意大利数学家 Giuseppe Peano (1858–1932) 于 1890 年放宽了 Picard 定理的条件, 证明连续性即可保证解的存在性 (当然仅有连续性无法保证唯一性). Peano 的结果后人称之为 **Peano 定理**.
- 关于常微分方程解的存在和唯一性还有很多其它进一步的推广和改进, 但超出了本课程的知识范围, 不在此介绍了.

下面的定理保证了方程 (1) 初值问题解的存在性和唯一.

定理 1 (Picard 定理)

设 $f(t,x)$ 在开区域 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 上连续, 且关于 x 满足**局部 Lipschitz 条件**, 即对 $\forall (t^*,x^*) \in \Omega$, 存在 (t^*,x^*) 的邻域 U_{t^*,x^*}, 及常数 L_{t^*,x^*}, 使得对 $\forall (t,x_1),(t,x_2) \in U_{t^*,x^*}$ 都有

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le L_{t^*,x^*}|x_1-x_2|.$$

则方程 (1) 过任一点 $(t_0,x_0) \in \Omega$ 都有唯一的解, 记为

$$x=\phi(t), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

引导和启发:

- 进一步解释局部Lipschitz条件;
- 引导学生思考：定理中的两个条件连续性和局部Lipschitz条件的作用如何？

- Picard 定理给出了微分方程 (1) 初值问题解的存在和唯一性的充分条件.
- 如果将局部 Lipschitz 条件换成 $f(t,x)$ 关于 x 在 Ω 中有连续偏导数, 则 Picard 定理的结论显然成立.

- Picard 定理保证从 Ω 中任一点出发有且仅有一个解 $x=\phi(t), t\in(\alpha,\beta)$. 进一步地,
    - 如果 $x=\psi(t), t\in(\mu,\nu)$ 也是方程 (1) 过 (t_0,x_0) 的解, 满足 $(\alpha,\beta)\subset(\mu,\nu)$, 且当 $t\in(\alpha,\beta)$ 时 $\psi(t)=\phi(t)$, 称解 $x=\psi(t)$ 是解 $x=\phi(t)$ 的**延拓**.
    - 若对于方程 (1) 过 (t_0,x_0) 的任一解 $x=\psi(t), t\in(\mu,\nu)$ 都有 $(\mu,\nu)\subset(\alpha,\beta)$, 称解 $x=\phi(t), t\in(\alpha,\beta)$ 是方程 (1) 过 (t_0,x_0)的**不可延拓的解**; 此时称 (α,β) 是方程 (1) 过 (t_0,x_0)的解的**最大存在区间**或简称**存在区间**.

回忆上一讲的例 4,5,6 中解的存在区间

4. 初值问题 $\dfrac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{3}}$, $y(1)=0$, 的解 $y=0$ 和

$$y(x)=0,\ \ x\le 2; \qquad y(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}(x-2)^{\frac{3}{2}},\ \ x>2,$$

的存在区间是 $(-\infty,\infty)$.

5. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$,
   - 满足初始条件 $y(1)=1$ 的解 $y=(2-x)^{-1}$ 的存在区间是 $(-\infty,2)$;
   - 满足初始条件 $y(1)=-1$ 的解 $y=-x^{-1}$ 的存在区间是 $(0,\infty)$.

6. 初值问题 $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$, $y(0)=0$, 的解 $y=\tan x$ 的存在区间是 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

注意: 方程右端的定义区域和解的存在区间及解在区间端点的极限!

注：

- 延拓和存在区间是本讲的难点，同学需进一步的理解、思考和消化。
- 可以思考：解在存在区间端点的极限？

引导探究： 定理 1 不仅保证了解的存在性, 而且保证了解的唯一性.

问题: 什么条件就可以保证解的存在性?

定理 2

(Peano 定理) 如果 $f(t,x)$ 在开区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上连续, 则方程 (1) 过任一点 $(t_0,x_0)\in\Omega$ 的解都存在, 且解定义在最大存在区间上.

定理 1 和 2 的证明将在以后中给出.

存在性和唯一性条件的必要性

上一讲的例 4 说明仅有连续性不能保证初值问题解的唯一性.

设问：如果 $f(t,x)$ 不满足连续性假设, 初值问题解的存在性能保证吗？

反例：初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(0) = 0, \qquad (x,y) \in (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}). \tag{2}$$

没有解, 其中

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}),\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

证：运用反证法, 如果初值问题 (2) 有解, 记为 $y=\phi(x), x\in J=[0,\beta)$ (在 0 的左边区间可以类似地讨论).

- 按照解的定义, $\phi(x)$ 是连续的且其导数存在.
- 由于在原点之外有 $f(x,y)\equiv 1$, 所以在原点之外有 $\phi(x)=x+b$
- 由 $\phi(x)$ 的连续性和 $\phi(0)=0$ 得

$$0=\phi(0)=\lim_{x\to 0}\phi(x)=b$$

所以 $\phi(x)=x, x\in J$. 但这与 $\phi'(0)=f(0,0)=0$ 矛盾.

- 这个矛盾说明初值问题 (2) 没有解.

探索发现：请同学自己构造初值问题有多解，与初值问题的解不存在的例子！

本段总结： 重点是存在唯一性定理的了解和掌握。延拓和存在区间概念的理解。

教学目的：

- 学生学会如何推导实际问题的模型。
- 在实践中培养学生学习常微分方程的兴趣。

1. 自由落体运动

- 以地面作为坐标原点，铅直向上的方向为坐标轴 x 的正方向
- 某时刻 t_0 在高度为 x_0 的地方将质量为 m 的物体放下，只在重力作用下物体在 t $(>t_0)$ 时刻的位置如何?
- 假设重力加速度为 g.
- 考虑重力的方向和 x 的正方向，并运用牛顿第二定律得 $m\ddot{x}=-mg$，即

$$\ddot{x}(t)=-g.$$

这是表述物体自由下落的运动方程.

2. 放射性物质衰变 设有某放射性物质在 t 时刻的数量为 $x(t)$, 且物质衰变的速度与物质的数量成正比, 则有

$$\dot{x}(t) = -kx(t),$$

其中 $k > 0$ 是物质衰变的比例常数. 该例描述放射性物质衰变的规律.

3. 人口模型 人口问题是非常复杂的, 它联系到社会学和生物学等诸多因素. 本例考虑一些理想化的情况.

设人口在某时刻 t 的数量为 $x(t)$, 人口的增长率为 $k(t,x)$. 则人口的变换规律为

$$\dot{x}(t) = k(t,x)x(t).$$

注: 人口的增长率为出生率和死亡之差, 它可正可负.

- 在资源极其丰富的情况下, 人口增长率 k 可以看作常数. 这是 Malthus 人口理论的基础.
- 但随着人口增长带来地区环境的破坏, 以及人口之间对有限资源的相互竞争, 人口增长率可以取为

$$k = a(1 - \frac{x}{L}),$$

其中常数 L 称为环境容量. 该模型较为实际的反映了人口的变化.

- 对于具体的实际情况, 人口增长率可以取其它合适的函数.

4. 数学摆的运动 数学摆是理想的质量为 m 摆长为 l 的单摆, 其只在重力作用下运动. 规定摆线离开铅直线向右的角度为正, 设 x 为单摆的摆线与铅直线的夹角. 在数学摆运动的切线方向运用牛顿第二定律得

$$ml\ddot{x} = -mg\sin x,$$

即

$$\ddot{x} = -\frac{m}{l}\sin x.$$

该方程描述了单摆的运动规律.

5. RLC 回路电流 考虑由电阻 (R)、电感 (L)、电容 (C)和电源构成的串联电路. 设在 t 时刻电源的电压为 $E(t)$, 电路的电流强度为 $I(t)$. 则该时刻电阻、电感和电容两端的电压分别是

$$U_R(t) = RI(t), \quad U_L(t) = LI'(t), \quad U_C(t) = \frac{1}{C}\int I(s)ds.$$

由电路工作的 Kirchhoff 定律得

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = E(t).$$

对方程两边关于 t 求导数得到关于回路电流满足的二阶微分方程

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t).$$

6. **Lotka–Volterra 捕食与被捕食模型** 描述了两个物种 (捕食者与被捕食者) 之间相互影响的生物学模型.

- 用 x 表示被捕食者的数量, y 表示捕食者的数量.

则刻画两者关系的 Lotka–Volterra 微分方程组为

$$\frac{dx}{dt} = x(a-by), \qquad \frac{dy}{dt} = y(-c+dx), \tag{3}$$

其中 a,b,c,d 是非负常数.

- 该模型由美国科学家 Alfred James Lotka (1880–1949) 于 1925 年为描述一类植物物种和一类食草性动物物种之间的关系建立的.
- 意大利数学家 Vito Volterra (1860–1940) 对亚得里亚海中鲨鱼和其它鱼种的数量关系进行统计分析, 并于 1926 年独立地对上述模型进行了研究, 给出了鱼群数量变化的合理解释.
- Lotka–Volterra 模型除了在生态学中, 还在如经济学,化学等很多其它学科中也有广泛的应用.

问题探究：

- 如何建立探照灯的常微分方程模型以刻画探照灯的形状
- 如何建立船在流动的水中到达河对岸的常微分方程模型以刻画船运行的轨迹。

以上给出了力学、电学和生物学上一些简单的实际模型满足的动力学方程的推导.

问题： 如何得到上述微分方程的解, 从而进一步理解和掌握这些实际问题的运动规律.

该问题为下一讲开始讲授初等积分法做好铺垫。

本讲总结

- **重点:** 解的几何解释、存在唯一性定理的理解和实际模型的建立
- **难点:** 解的几何解释、存在唯一性定理的理解

作业： 习题一 3，5.2，6.2，6.3.