第二十九讲、稳定的概念、线性齐次微分方程组零解的稳定性

张　祥

xzhang@sjtu.edu.cn

答疑时间：周三晚上 6:30–8:20 点

答疑地点：老图书馆数学楼 301

本讲教学目的与目标

- 微分方程组解的稳定性概念和判定
- 线性齐次微分方程组解的稳定性

回顾:

- 平面二阶线性齐次微分方程组零解的局部结构
- 强调引导思考在不同情况下, 坐标原点附近轨线的走向

为什么讨论稳定性?

- 在电子、机械、生物、物理、化学、金融甚至社会生活中的很多实际的运动规律都是由常微分方程或方程组来描述的.
- 一个给定的微分方程组可以有无穷多个解, 它们依赖于不同的初始条件. 但从不同初始条件出发的解往往最终趋向于某个特定的解, 称之为**稳态解**.
- 稳态解的存在性在实际问题中至关重要, 它也是微分方程稳定性理论的重要研究内容.

如何定义稳定性?

稳定性的定义

对于 n 阶微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \tag{1}$$

记 $\mathbf{x}_0(t)$ 是其满足初始条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解.

- 称解 $\mathbf{x}_0(t)$ 是**稳定的**, 如果对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 微分方程组 (1) 过 $(t_0, \mathbf{x})$ 的解 $\mathbf{x}(t)$ 都满足 $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \varepsilon, t \geq t_0$. 这种稳定性又称为 **Lyapunov 稳定**.

- 称解 $\mathbf{x}_0(t)$ 是**渐近稳定的**, 如果它是稳定的, 且对上述的 $\delta > 0$, 如果 $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| = 0$.
- 称解 $\mathbf{x}_0(t)$ 是**不稳定的**, 如果它不是稳定的, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 使得对 $\forall \delta > 0$ 都存在 $\mathbf{x}_\delta^*$ 满足 $\|\mathbf{x}_\delta^* - \mathbf{x}_0\| < \delta$, 及对任意大的 $T_\delta^* > 0$ 都存在时间 $t_\delta^* > T_\delta^*$ 使得 $\|\mathbf{x}_\delta^*(t_\delta) - \mathbf{x}_0(t_\delta^*)\| > \varepsilon_0$.

附注: 稳定性定义的进一步探讨

- 运用 Lyapunov 稳定性研究特定轨道的稳定性时, 通常是经过变换将其转化为新方程的平衡点来研究.
- 渐近稳定性定义中稳定的假设不能去掉. 例如单位圆周

$$S^1 = \{z = e^{2\pi\sqrt{-1}\theta},\ \theta \in [0,1)\},$$

上的微分方程

$$\dot{\theta} = \sin^2(\pi\theta),$$

有唯一的平衡点 $\theta = 0$.

从 S^1 上任一点 ($\theta = 0$ 除外) 出发的轨道当 $t \to \infty$ 时都沿着圆周逆时针方向趋向于平衡点 0, 从而满足渐近稳定性定义中的后半部分条件,

但这些轨道当 $t \to -\infty$ 时又都沿着圆周顺时针方向趋向于平衡点 0, 因而平衡点是不稳定的.

引导探索：如何判定解的稳定性？

定理 59

设 $\mathbf{A} \in \mathscr{M}$. 对于常系数线性齐次微分方程组

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{2}$$

(a) 如果 $\mathbf{A}$ 的特征值的实部都小于零, 则微分方程组 (2) 的零解渐近稳定.

(b) 如果 $\mathbf{A}$ 的特征值的实部都小于或等于零, 且实部为零的特征值的代数重数等于几何重数, 则微分方程组 (2) 的零解 Lyapunov 稳定.

(c) 如果 $\mathbf{A}$ 有实部大于零的特征值, 或有实部为零的特征值且其代数重数大于几何重数, 则微分方程组 (2) 的零解不稳定.

证: (a) 由推论 48 $\Longrightarrow$ 存在 $\rho>0, a>0$ 使得对 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$,

$$\|e^{x\mathbf{A}}\mathbf{v}\|_2 \le a\|\mathbf{v}\|e^{-\rho x}, \quad x\in[0,\infty).$$

而微分方程组 (2) 的任一解 $\mathbf{y}(x)$ 都可表示成

$$\mathbf{y}(x)=e^{x\mathbf{A}}\mathbf{v},$$

的形式. 由此可证微分方程组 (2) 的零解渐近稳定.

(b) 设 $\mathbf{A}$ 的互不相同的特征值为

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ \lambda_{k+1},\ldots,\lambda_s,$$

它们的代数重数为

$$n_i,\ i=1,\ldots,s;$$

且

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i<0, i=1,\ldots,k; \quad \mathrm{Re}\,\lambda_i=0, i=k+1,\ldots,s.$$

因为 $\lambda_i, i=k+1,\ldots,s$ 的代数重数等于其几何重数,

所以其对应的线性无关的特征向量有 n_i 个.

由定理 47 及其附注 1 得, 微分方程组 (2)有基解矩阵

$$\Phi(x)=\left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{P}_1^{(1)}(x),\ldots,e^{\lambda_1 x}\mathbf{P}_{n_1}^{(1)}(x),\ldots,e^{\lambda_s x}\mathbf{P}_1^{(s)}(x),\ldots,e^{\lambda_s x}\mathbf{P}_{n_s}^{(s)}(x)\right),$$

其中

$$P_i^{(j)}(x), j=1,\ldots,k, i=1,\ldots,n_j$$

是次数不超过 n_j-1 的多项式, 而

$$P_i^{(j)}(x), j=k+1,\ldots,s, i=1,\ldots,n_j$$

是常数向量 (对应于 λ_j 的特征向量). 记

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= \left(e^{\lambda_1 x}\mathbf{P}_1^{(1)}(x),\ldots,e^{\lambda_1 x}\mathbf{P}_{n_1}^{(1)}(x),\ldots,e^{\lambda_k x}\mathbf{P}_1^{(k)}(x),\ldots,e^{\lambda_k x}\mathbf{P}_{n_k}^{(k)}(x)\right),\\ \Psi_2(x) &= \left(e^{\lambda_{k+1} x}\mathbf{P}_1^{(k+1)},\ldots,e^{\lambda_{k+1} x}\mathbf{P}_{n_{k+1}}^{(k+1)},\ldots,e^{\lambda_s x}\mathbf{P}_1^{(s)},\ldots,e^{\lambda_s x}\mathbf{P}_{n_s}^{(s)}\right),\end{aligned}$$

由推论 48 及其证明得, 存在 $\rho>0, a>0$ 使得对 $\forall \mathbf{v}_1\in\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k}$,

$$\|\Psi_1(x)\mathbf{v}_1\|_2 \le a\|\mathbf{v}_1\|_2 e^{-\rho x},\quad x\in[0,\infty).$$

又因为 $|e^{\lambda_i x}|=1\ (i=k+1,\ldots,s)$, 且

$\mathbf{P}_j^{(i)}\ (i=k+1,\ldots,s,j=1,\ldots,n_i)$ 是确定的常数向量,

所以存在 $b>0$ 使得对 $\forall \mathbf{v}_2\in\mathbb{R}^{n_{k+1}+\cdots+n_s}$,

$$\|\Psi_2(x)\mathbf{v}_2\|_2 \le b\|\mathbf{v}_2\|_2,\quad x\in[0,\infty).$$

而微分方程组 (2)的通解可以写成

$$\mathbf{y}(x)=\Phi(x)\mathbf{v}=\Psi_1(x)\mathbf{v}_1+\Psi_2(x)\mathbf{v}_2,$$

其中 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{pmatrix}$ 是任意常数向量. 所以

$$\|\mathbf{y}(x)\|_2=\|\Phi(x)\mathbf{v}\|_2\le\left(a\|\mathbf{v}_1\|_2e^{-\rho x}+b\|\mathbf{v}_1\|_2\right)\le(a+b)\|\mathbf{v}\|_2,\quad x\in[0,\infty).$$

由此可证微分方程组 (2) 的零解是 Lyaponov 稳定.

(c) 如果 $\mathbf{A}$ 有实部大于零的特征值, 记为 $\lambda_0 = \alpha_0 + \sqrt{-1}\beta_0$. 由定理 47 得, 微分方程组 (2)有形如

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}(x)e^{\lambda_0 x},$$

的解, 其中 $\mathbf{P}(x)$ 是一个次数不超过 $n-1$ 的多项式.

因为 $\alpha_0 > 0$, 所以

$$\lim_{x\to\infty} \|\mathbf{y}(x)\|_2 = \lim_{x\to\infty} \|\mathbf{P}(x)e^{\lambda_0 x}\|_2 = \lim_{x\to\infty} \|\mathbf{P}(x)\|_2 e^{\alpha_0 x} = \infty.$$

这就证明了微分方程组 (2) 的零解不稳定

如果 $\mathbf{A}$ 有实部为零的特征值, 记为 $\lambda_0 = \sqrt{-1}\beta_0$, 且其代数重数大于几何重数. 由定理 44 得, 微分方程组 (2) 有形如

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}(x)e^{\lambda_0 x},$$

的解, 其中 $\mathbf{P}(x)$ 是一个次数不为零的多项式. 所以有

$$\lim_{x\to\infty} \|\mathbf{y}(x)\|_2 = \lim_{x\to\infty} \|\mathbf{P}(x)\|_2 = \infty.$$

因此微分方程组 (2) 的零解不稳定. 证毕.

本讲介绍借助线性近似方程判定原非线性微分方程解的稳定性.

定理 62

对于非线性微分方程组

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \tag{3}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, 假设 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) = O(\|\mathbf{y}\|^2)$, $\|\mathbf{y}\| \ll 1$ 在某区域 $G = [0,\infty) \times \{\mathbf{y}; \|\mathbf{y}\| < K\}$ 上连续且关于 $\mathbf{y}$ 满足局部 Lipschitz 条件.

(a) 如果 $\mathbf{A}$ 的特征值的实部都小于零, 则非线性微分方程组 (3) 的零解渐近稳定.

(b) 如果 $\mathbf{A}$ 有正实部的特征值, 则非线性微分方程组 (3) 的零解不稳定.

这里不给出其证明. 有兴趣的读者可以参见 王高雄等的《常微分方程》.

附注:

如果 $\mathbf{A}$ 既有实部为零又有实部小于零的特征值或特征值的实部都为零, 则非线性微分方程组 (3) 零解的稳定性依赖于非线性项 $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ 的取值. 例如

1. 二阶微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \alpha x(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),\\ \dot{y} &= x + \alpha y(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),\end{aligned} \tag{4}$$

- 当 $\alpha = 0$ 时, 相应的线性微分方程组的系数部分的特征值是一对纯虚数, 坐标原点是相应的线性微分方程组的中心, 因而是稳定的, 但非渐近稳定.
- 当 $\alpha \neq 0$ 时, 通过极坐标变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 方程组 (4) 转化为

$$\dot{r} = \alpha r^3 (r^2 - 1), \qquad \dot{\theta} = 1.$$

  由此方程容易得到:
  - 当 $\alpha > 0$ 时, 从单位圆周内部出发的轨线都逆时针方向盘旋逼近坐标原点, 因而方程组 (4) 的零解是渐近稳定的.
  - 当 $\alpha < 0$ 时, 从单位圆周内部 (坐标原点除外) 出发的轨线都逆时针方向盘旋逼近单位圆周, 因而方程组 (4) 的零解是不稳定的.

2. 二阶微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - \alpha y(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),\\ \dot{y} &= x + \alpha x(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),\end{aligned} \tag{5}$$

在极坐标变换 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 下转化为

$$\dot{r} = 0, \qquad \dot{\theta} = 1 + \alpha r^2(r^2-1).$$

因此对 α 的任意值, 方程组 (5) 的坐标原点都是中心, 故零解是稳定但不是渐近稳定的.

注:

- 类似地可以举出当线性微分方程的系数矩阵具有零特征值时, 加上高阶项后得到的非线性微分方程的零解具有各种可能的稳定性.
- 上述例子说明: 一个非线性微分方程的零解的线性部分具有零实部的特征值时, 零解的稳定性判定问题是十分困难的.

考虑自治微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

假设纯量函数 $V(x)$, $\|\mathbf{x}\| \le M$, 连续可微.

- 函数 $V(\mathbf{x})$ 关于方程 (6) 的**全导数**定义为

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)} = \left.\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n\right|_{(6)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}).$$

- 函数 $V(\mathbf{x})$ 称为**定正 (定负)** 的, 如果

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \ (V(\mathbf{x}) < 0), \qquad \mathbf{x} \neq 0.$$

- 函数 $V(\mathbf{x})$ 称为**常正 (常负)** 的, 如果

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) \ge 0 \ (V(\mathbf{x}) \le 0), \qquad \mathbf{x} \neq 0.$$

- 上述定义中的函数 $V(\mathbf{x})$ 统称为 **Lyapunov 函数.**

例题:

函数 $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$

- 在 $\mathbb{R}^2$ 中是定正的,
- 而在 $\mathbb{R}^3$ 中是常正的但非定正.

它关于方程

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \tag{7}$$

的全导数为

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} = 4x_1^3(-x_2) + 2x_2x_1 = 2x_1x_2(1 - 2x_1^2).$$

定理 63 (Lyapunov 稳定性判别法)

设 $\mathbf{x}=0$ 是方程 (6) 的解. 函数 $V(\mathbf{x})$ 在 $\|\mathbf{x}\| \leq M$ 上连续可微.

(a) 如果 $V(\mathbf{x})$ 是定正的, 且 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}$ 是常负的, 则方程 (6) 的零解是稳定的.

(b) 如果 $V(\mathbf{x})$ 是定正的, 且 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}$ 是定负的, 则方程 (6) 的零解是渐近稳定的.

(c) 如果 $V(\mathbf{x})$ 是定正的, 且 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}$ 是定正的, 则方程 (6) 的零解是不稳定的.

证: (a) 对 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < M$), 令

$$m = \min_{\varepsilon \le \|\mathbf{x}\| \le M} V(\mathbf{x}).$$

- 因 V 连续, 且 $V(\mathbf{x}) \neq 0$, $\|\mathbf{x}\| > 0$, 所以 $0 < m < \infty$.
- 又因为 $V(\mathbf{0}) = 0$, 所以存在 $\delta > 0$ 使得

$$V(\mathbf{x}) < m, \qquad \|\mathbf{x}\| < \delta.$$

下证: 对任意的 $\|\mathbf{x}\| < \delta$, 方程 (6) 在某时刻 t_0 从 $\mathbf{x}$ 出发的解 $\mathbf{x}(t)$ 当 $t > t_0$ 时都有 $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$.

若不然, 存在 $t^* > t_0$ 使得 $\|\mathbf{x}(t^*)\| = \varepsilon$, $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, t \in [t_0, t^*)$.

由定理 (a) 的假设得

$$V(\mathbf{x}(t^*)) - V(\mathbf{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t^*} \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \le 0.$$

而 $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, 所以

$$V(\mathbf{x}(t^*)) \le V(\mathbf{x}(t_0)) < m.$$

这与 $V(\mathbf{x}(t^*))$ 的定义矛盾. 这个矛盾说明:

$$\text{只要 } \|\mathbf{x}\| < \delta, \text{ 就有 } \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, t > t_0.$$

因而零解是稳定的.

(b) 由 (a), 方程 (6) 的零解是稳定的.

对于 (a) 的证明中给定的 δ. 对 $\forall \mathbf{x}$ 满足 $\|\mathbf{x}\| < \delta$, 由于

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \le 0, \qquad V(\mathbf{x}(t)) \ge 0,$$

所以极限 $\lim\limits_{t\to\infty} V(\mathbf{x}(t))$ 存在, 记其为 l.

下证 $l=0$. 若不然, $l>0$. 因为

$$V(\mathbf{x}(t)) \geq l, \quad t \in [t_0, \infty),$$

且 $V(\mathbf{0})=0$, 所以 $\exists \rho>0$ 使得

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \rho, \quad t \in [t_0, \infty)$$

因而

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} < 0, \quad t \in [t_0, \infty).$$

令

$$r := \max_{\rho \leq \|\mathbf{x}\| \leq M} \left.\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}\right|_{(6)}.$$

则有 $-\infty < r < 0$. 所以

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV(\mathbf{x}(s))}{ds} ds \le r(t-t_0), \qquad t \in [t_0, \infty).$$

当 $t \to \infty$ 时, 左边为有限值, 而右边趋于负无穷.
这个矛盾说明: $l = 0$.

最后证

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

若不然, 因为 $\{\mathbf{x}(t); t \in [t_0, \infty)\}$ 有界, 所以存在单调递增点列 $\{t_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}.$$

但由 $V(\mathbf{x})$ 和解 $\mathbf{x}(t)$ 的连续性得

$$0=\lim_{n\to\infty}V(\mathbf{x}(t_n))=V(\mathbf{x}^*)\neq 0.$$

这个矛盾说明: $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(t)\|=0$.

(c) 反证. 如果零解是稳定, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得当 $0<\|\mathbf{x}\|<\delta$ 时, 满足初始条件 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}$ 的解有

$$\|\mathbf{x}(t)\|<\varepsilon,\qquad t\in[t_0,\infty).$$

因

$$\left.\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}\right|_{(6)}>0,\quad \mathbf{x}\neq 0,$$

所以

$$V(\mathbf{x}(t))\geq V(\mathbf{x}(t_0))=V(\mathbf{x})>0.$$

从而 $\exists \sigma > 0$ 使得

$$\|\mathbf{x}(t)\| \geq \sigma, \qquad t \in [t_0, \infty).$$

令

$$\rho = \min_{\sigma \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon} \left. \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \right|_{(6)}.$$

则 $0 < \rho < \infty$. 从而有

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV(\mathbf{x}(s))}{ds} ds \geq \rho(t - t_0).$$

因 $\sigma \leq \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ 且 V 连续,

所以当 $t \to \infty$ 时, 左边有限, 而右边趋向正无穷.

这个矛盾说明零解是不稳定的. 证毕.

附注:

1. 定理 63 中判定零解稳定性的方法称为 **Lyanunov 第二方法**. 它是俄罗斯数学家 Aleksandr Lyapunov (1857–1918) 于 1892 年在其博士论文中提出的, 该方法在动力系统稳定性的研究方面起着重要的作用.

- 除了定理 63 中的判别方法外, 还有一些其它的推广. 本讲不一一罗列.

2. 相对于第二方法, Lyapunov 第一方法用级数判定稳定性, 由于用起来不方便, 现在很少提起. 但与 Lyapunov 第一方法相关的 Lyapunov 指数在现代动力系统的混沌研究方面正起着极其重要的作用.

例题:

1. 方程组

$$\dot{x} = x^3 - 2y^3, \quad \dot{y} = xy^2 + x^2y + \frac{1}{2}y^3,$$

的零解不稳定, 可以通过取

Lyapunov 函数 $V = x^2 + 2y^2$ 证得.

2. 方程组

$$\dot{x} = y - x^3, \quad \dot{y} = -2(x^3 + y^5),$$

的零解渐近稳定, 可以通过取

Lyapunov 函数 $V = x^4 + y^2$ 证得.

3. 方程组

$$\dot{x} = y + 2y^3, \quad \dot{y} = -x - 2x^3,$$

的零解稳定, 可以通过取

Lyapunov 函数 $V = x^2 + x^4 + y^2 + y^4$ 证得.

4. 方程

$$\dot{x} = 2x^2y + y^3, \quad \dot{y} = -xy^2 + 2x^5, \tag{8}$$

的零解不稳定. 事实上, 取函数 $V = xy$, 则

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)} = x^2y^2 + y^4 + 2x^6, \tag{9}$$

在零解的邻域内定正. 由于在

y 的正半轴上 $\dot{x} > 0$, 在 x 的正半轴上 $\dot{y} > 0$,

所以从第一象限出发的轨道随着时间的增加将始终保持在第一象限.

又从 (9) 知, 沿着从第一象限中任一点出发的轨道随着时间的增加 $V = xy$ 的值严格增加, 这说明从第一象限出发的轨道随着时间的增加都将逐渐远离零解. 从而零解是不稳定的.

附注: 具体应用 Lyapunov 第二方法的关键是

- 要构造合适的 Lyapunov 函数,
- 但没有一般的指导方法构造 Lyapunov 函数.
- 对于具体问题, 在构造 Lyapunov 函数时尽量使得其沿着方程的全导数中不含各个变量的奇次项.

本讲的重点：

- 熟练掌握稳定的定义
- 常系数和周期系数线性微分方程零解的稳定性判定
- Lyapunov第二方法的理论和应用

本讲的难点：

- 理论证明
- 具体系统Lyapunov函数的构造

作业： 习题五

- 线性近似判定稳定性： 4，5
- Lyapunov 第二方法： 7. 2， 7.3， 7.6， 9， 10.

期末考试答疑时间：

- 元月5号下午：16:00–18:00, 19:00–20:00
- 元月6号下午：14:00–18:00, 19:00–20:00

答疑地点：我的办公室，新数学楼 301