信号与系统

第二十六讲

§3.3　卷积和

§6.1　z 变换

系统方程 $y(k)+6y(k-1)+9y(k-2)=f(k)$ 已知初始条件 $y(0)=1$，$y(1)=-2$；激励 $f(k)=4^k$，$k\geqslant 0$。求方程的全解。

解：特征方程 $\lambda^2+6\lambda+9=0$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-3$

齐次解 $y_h(k)=(C_1k+C_2)(-3)^k$ 自由响应

特解 $y_p(k)=P(4)^k,\ k\geqslant 0$

代入差分方程 $P(4)^k+6P(4)^{k-1}+9P(4)^{k-2}=f(k)=4^k$

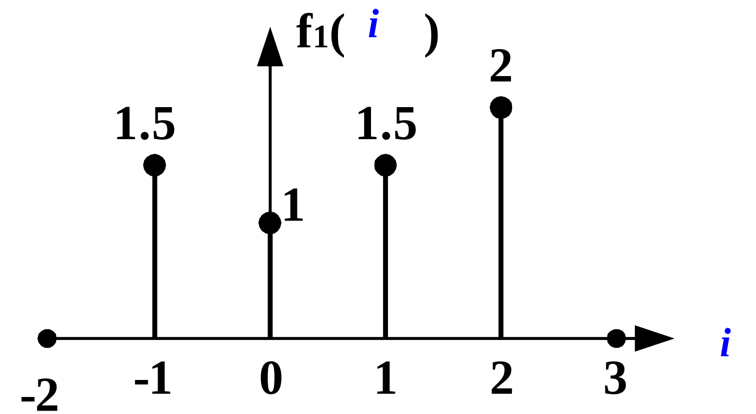
解得 $P=16/49$

特解 $y_p(k)=(16/49)(4)^k\quad k\geqslant 0$ 强迫响应

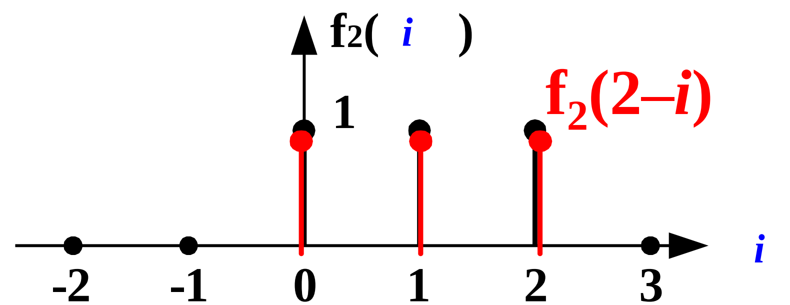
全解 $y(k)=y_h+y_p=(C_1k+C_2)(-3)^k+(16/49)4^k,\ k\geqslant 0$

代入初始条件 $C_1=3/7$，$C_2=33/49$

例： $f_1(k)$、$f_2(k)$如图所示，已知$f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，求$f(2)$ =?



解： $$f(2)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\,f_2(2-i)$$



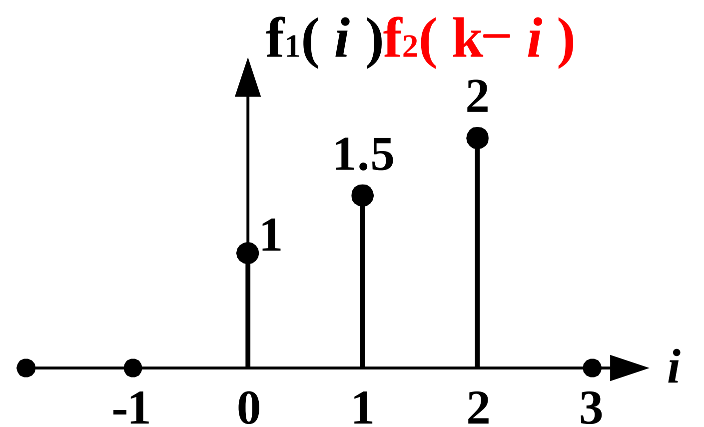
（1）换元

（2）$f_2(i)$反转得$f_2(-i)$

（3）$f_2(-i)$右移2得$f_2(2-i)$

（4）$f_1(i)$乘$f_2(2-i)$

（5）求和，得$f(2)=4.5$



二、不进位乘法求卷积

有限长序列卷积和计算：不进位乘法

方法：

将两序列样值以各自 k的最高值按右端对齐，然后把逐个样值对应相乘，但不进位，最后把同一列上的乘积值按对位求和。

$$
\begin{array}{r}
1.5 \quad 1 \quad 1.5 \quad 2 \\
1 \quad 1 \quad 1 \\
\times \overline{\hspace{6cm}}
\end{array}
$$

不进位乘法求卷积和

例 $f_1(k)=\{1.5,\ 1,\ 1.5,\ 2\}$　　求 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$

$\uparrow k=0$

$f_2(k)=\{1,\ 1,\ 1\}$

$\uparrow k=0$

解

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1.5, & 1, & 1.5, & 2 \\
\times & & & & 1, & 1, & 1 \\
\hline
 & & & 1.5, & 1, & 1.5, & 2 \\
 & & 1.5, & 1, & 1.5, & 2 & \\
 & 1.5, & 1, & 1.5, & 2 & & \\
+ & & & & & & \\
\hline
 & 1.5, & 2.5, & 4, & 4.5, & 3.5, & 2
\end{array}
$$

$f(k)=\{1.5,\ 2.5,\ 4,\ 4.5,\ 3.5,\ 2\}$

$\uparrow k=0$

三、卷积和的性质

1. 满足乘法三律：(1) 交换律 (2) 分配律 (3) 结合律.

2. $f(k)*\delta(k)=f(k)$ ，$f(k)*\delta(k-k0)=f(k-k0)$

3. $f(k)*\varepsilon(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f(i)$

4. $f1(k-k1)*f2(k-k2) = f(k-k1-k2)$

5. $\triangle[f_1(k)*f_2(k)]=\triangle f_1(k)*f_2(k)=f_1(k)*\triangle f_2(k)$

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\,\varepsilon(t)$$

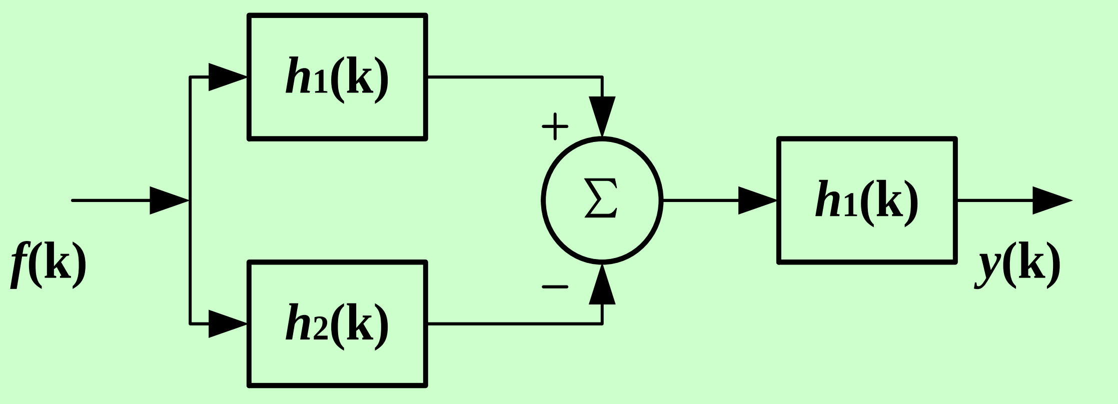
$$\varepsilon(t+a) * \varepsilon(t+b) = (t+a+b)\,\varepsilon(t+a+b)$$

$$\varepsilon(k) * \varepsilon(k) = (k+1)\varepsilon(k)$$

$$\varepsilon(k+a) * \varepsilon(k+b) = (k+a+b+1)\,\varepsilon(k+a+b)$$

例 复合系统中 $h_1(k)=\varepsilon(k)$，$h_2(k)=\varepsilon(k-5)$，求复合系统的单位序列响应 $h(k)$

由性质求卷积和



解 根据h(k)的定义，有

$$h(k)=[\delta(k)*h_1(k)-\delta(k)*h_2(k)]*h_1(k)$$

$$=[h_1(k)-h_2(k)]*h_1(k)$$

$$=h_1(k)*h_1(k)-h_2(k)*h_1(k)$$

$$=\varepsilon(k)*\varepsilon(k)-\varepsilon(k-5)*\varepsilon(k)$$

$$=(k+1)\varepsilon(k)-(k-5+1)\varepsilon(k-5)$$

$$=(k+1)\varepsilon(k)-(k-4)\varepsilon(k-5)$$

第六章　离散系统的z域分析

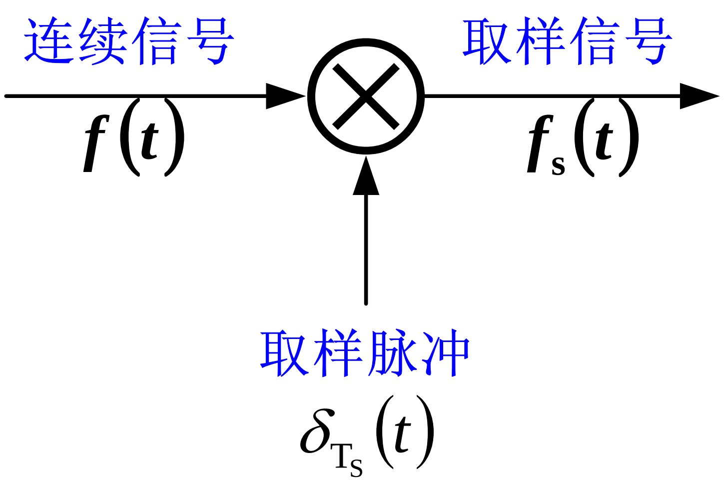
连续系统，通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。

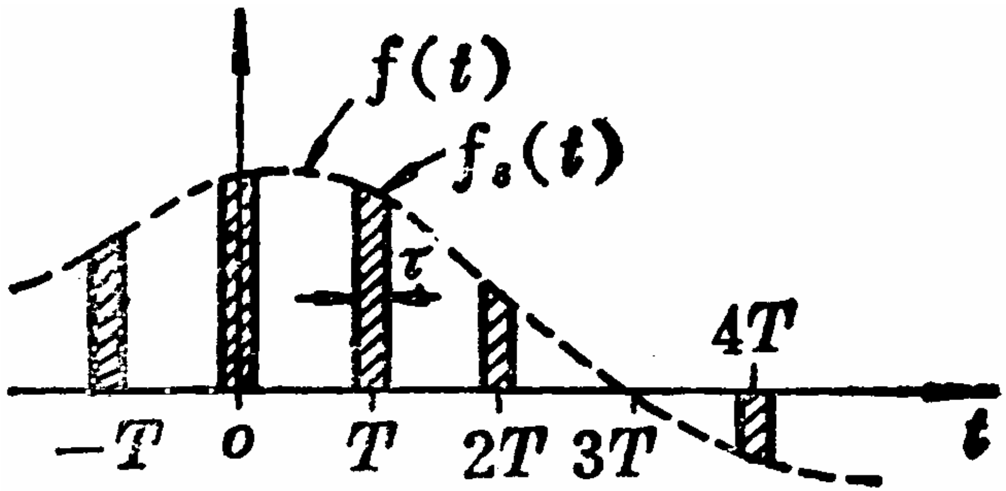
离散系统，通过z变换，把差分方程转换为代数方程。

§6.1　z 变换

一、从拉普拉斯变换到z变换

对连续信号进行均匀冲激取样，就得到离散信号：





输入原信号f(t)和输出取样信号fs(t)

$$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

186页　4.9-10

一、从拉普拉斯变换到z变换

$$f_S(t)=f(t)\delta_T(t)=f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$$

取双边拉斯变换：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f_s(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)\right]e^{-st}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-skT}$$

$f(kT)\to f(k)$ 令 $z=e^{sT}$ $$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

19页 1.4-30

二、z变换定义

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

序列f(k)的双边z变换

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

序列f(k)的单边z变换

$F(z)=Z[f(k)]$，$f(k)=Z^{-1}[F(z)]$； $f(k)\longleftrightarrow F(z)$

三、收敛域

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f(k) z^{-k} \right| < \infty$$

是z变换存在的**充分必要条件**。

对于序列$f(k)$，满足 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f(k) z^{-k} \right| < \infty$所有z值组成的集合称为z变换**F(z)的收敛域**。

例6.1-1 求以下有限序列的z变换

(1) $f(k)=\delta(k)$ $\downarrow k=0$

(2) $f(k)=\{1, 2, 3, 2, 1\}$

解 (1) $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)=1$

(2) $f(k)$ 的双边z 变换为

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$$

$$F(z) = z^2 + 2z + 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

$f(k)$ 的单边z变换为

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k}=3+2z^{-1}+z^{-2}$$

例6.1-2 求因果序列 $f_1(k)=a^k\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ a^k, & k\geq 0\end{cases}$ **z变换**

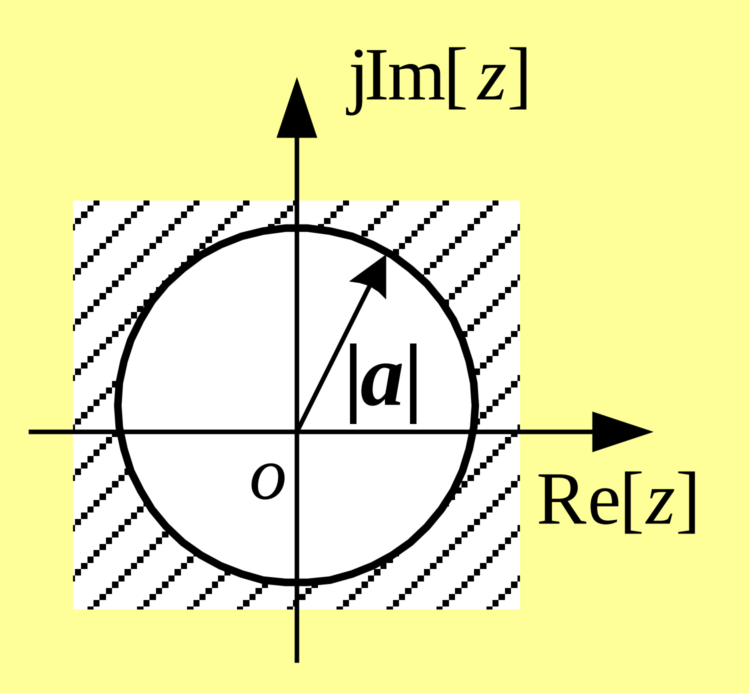
解：根据定义

$$F_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(az^{-1})^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}}$$

可见：仅当 $|az^{-1}|<1$，$|z|>|a|$时，其z变换存在。

$$F_1(z)=\frac{z}{z-a}$$

收敛域为 $|z|>|a|$



例6.1-3 求反因果序列的z变换

$$f_2(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ 0, & k\ge 0 \end{cases} = b^k\varepsilon(-k-1)$$

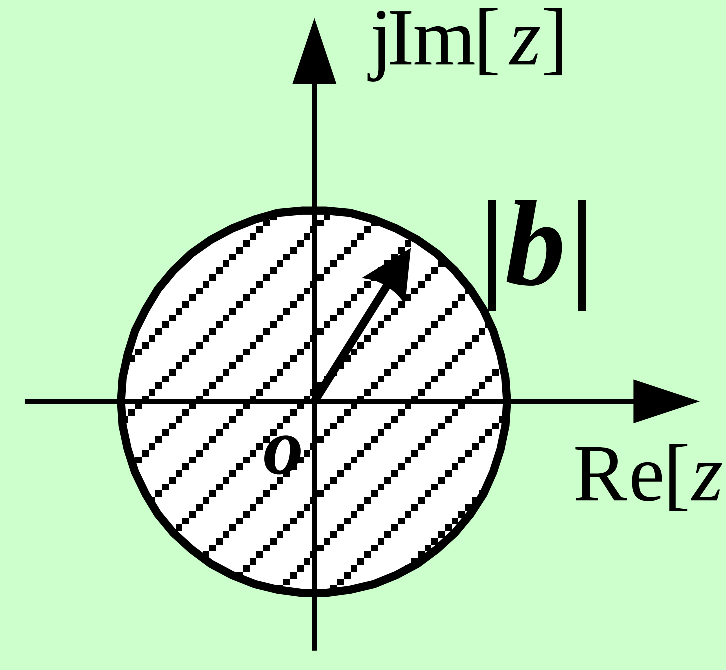
解

$$F_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(bz^{-1})^k=\sum_{m=1}^{\infty}(b^{-1}z)^m=\lim_{N\to\infty}\frac{b^{-1}z-(b^{-1}z)^{N+1}}{1-b^{-1}z}$$

$|b^{-1}z|<1$，即 $|z|<|b|$ 时，其z变换存在

$$F_2(z)=\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为 $|z|<|b|$ →

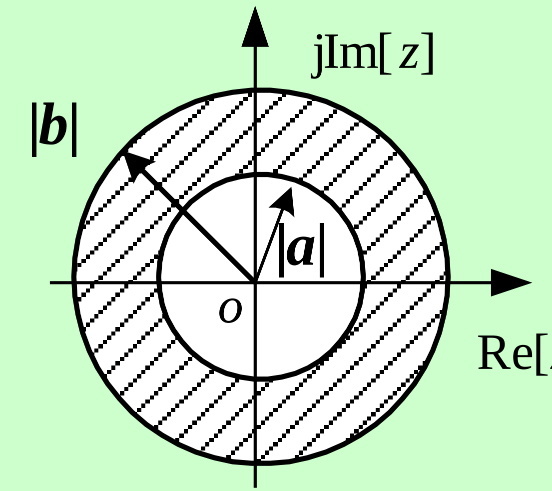


例4 双边序列 $f(k)=f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases} b^k, & k<0 \\ a^k, & k\ge 0 \end{cases}$ **z变换**

解

$$F(z)=F_1(z)+F_2(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{-z}{z-b}$$

收敛域为 $|a|<|z|<|b|$



收敛域有几种情况：

（1）有限长序列，其双边z变换在整个平面；

（2）因果序列，其z变换收敛域为某圆外区域；

（3）反因果序列，其z变换收敛域为某圆内区域；

（4）双边序列，其z变换收敛域为环状区域；

注意： 双边z变换须表明收敛域，否则其对应的序列将不唯一。

例

$$f_1(k)=2^k\varepsilon(k)\longleftrightarrow F_1(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\quad |z|>2$$

$$f_2(k)=-2^k\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow F_2(z)=\frac{z}{z-2}\ ,\quad |z|<2$$

常用序列的z变换：

$$\delta(k)\longleftrightarrow 1\ ,\quad |z|>0$$

$$\varepsilon(k)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\quad |z|>1$$

$$-\varepsilon(-k-1)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}\ ,\quad |z|<1$$