§6.2 方差

在实际问题中常关心随机变量与均值的偏离程度，可用 E|X-EX|，但不方便；所以通常用$E(X-EX)^2$来度量随机变量 X 与其均值 EX 的偏离程度。

1、定义

设 X 是随机变量，若$E(X-EX)^2$存在，称其为随机变量 X 的方差，记作 DX，Var(X)，即：DX=Var(X)= $E(X-EX)^2$。$\sqrt{DX}$称为标准差。

$$DX=E(X-EX)^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-EX)^2\cdot p_i\text{，}\quad \text{离散型。}$$

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2f(x)dx\text{，}\quad \text{连续型。}$$

注：方差描述了随机变量的取值与其均值的偏离程度。

方差也可由下面公式求得：

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

证明：

$$DX = E(X - EX)^2$$

$$= E\left(X^2 - (2EX)\ X + (EX)^2\right)$$

$$= EX^2 - (2EX)\ EX + (EX)^2$$

$$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2$$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

例13

甲、乙两人射击，他们的射击水平由下表给出：

X：甲击中的环数；

Y：乙击中的环数；

X	8	9	10
P	0.3	0.2	0.5

Y	8	9	10
P	0.2	0.4	0.4

试问哪一个人的射击水平较高？

例13（续）

解：

比较两个人的平均环数.

甲的平均环数为

$$EX = 8*0.3+9*0.2+10*0.5 = 9.2 \quad (\text{环})$$

乙的平均环数为

$$EY = 8*0.2+9*0.4+10*0.4 = 9.2 \quad (\text{环})$$

因此，从平均环数上看，甲乙两人的射击水平是一样的，但两个人射击环数的方差分别为

例13（续）

$$DX = (8-9.2)^2 * 0.3 + (9-9.2)^2 * 0.2 + (10-9.2)^2 * 0.5$$

$$= 0.76$$

$$DY = (8-9.2)^2 * 0.2 + (9-9.2)^2 * 0.4 + (10-9.2)^2 * 0.4$$

$$= 0.624$$

由于 $DY < DX$,

这表明乙的射击水平比 甲稳定.

2、方差的性质 $DX = E(X - EX)^2$

1）$DX \geq 0$，若 C 是常数，则 $DC = 0$

2）$D(CX) = C^2 DX$

3）$D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X - EX)(Y - EY)$，

a，b 是常数。若 X，Y 独立，

则 $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY$

证：$D(aX+bY) = E[aX+bY-E(aX+bY)]^2$

$$= E[a(X-EX)+b(Y-EY)]^2$$

$$= E[a^2(X-EX)^2] + E[b^2(Y-EY)^2]$$

$$+ 2E[ab(X-EX)(Y-EY)]$$

$$= a^2 DX + b^2 DY + 2abE(X-EX)(Y-EY)$$

若X,Y独立，则

E(X-EX)(Y-EY)=E (X-EX)E (Y-EY)=0

故：

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abE(X-EX)(Y-EY),$$

$$=a^2DX+b^2DY$$

4）$DX=0 \Leftrightarrow P\{X=c\}=1$， $c=EX$

注：

令， $Y=(X-EX)/\sqrt{DX}$ 则 EY=0,DY=1。
称Y是随机变量X的标准化了的随机变量。

例 已知随机变量 X，Y 相互独立且分别服从 $B(10,0.1)$ 和 $N(-1,2^2)$，求 $Z=3X-2Y$ 的方差.

解 $D(X)=10\times 0.1\times 0.9=0.9$

$D(Y)=2^2=4$

所以

$$\begin{aligned}D(Z)&=D(3X)+D(-2Y)\\&=9D(X)+4D(Y)\\&=9\times 0.9+4\times 4\\&=24.1.\end{aligned}$$

例 14

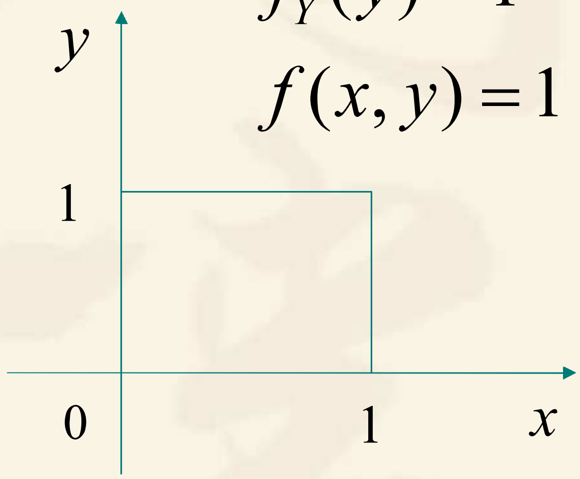
设$X,Y \sim U[0,1]$，且相互独立。求：$E|X-Y|, D|X-Y|$

解：

$$f_X(x)=1 \quad 0<x<1,$$

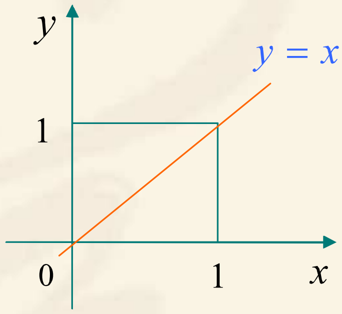
$$f_Y(y)=1 \quad 0<y<1,$$

$$f(x,y)=1 \quad 0<x<1, 0<y<1.$$



例 14续

$$E|X-Y| = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|\,f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dxdy$$



$$= \int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy + \int_0^1 dy\int_0^y (y-x)dx$$

$$= 2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy \quad = 2\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx \quad = \frac{1}{3}$$

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

先求：

$$E|X-Y|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^2\, f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 |x-y|^2\, dxdy$$

例 14（续）

$$= \int_0^1\int_0^1 (x-y)^2 dxdy = \int_0^1\int_0^1 (x^2-2xy+y^2)dxdy = \frac{1}{6}$$

则:

$$D|X-Y| = E|X-Y|^2 - (E|X-Y|)^2$$

$$= \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}$$

思考题：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$,且它们独立,

求：$E|X-Y|, D|X-Y|$