第七章 数理统计的基础知识

§7.1 数理统计的基本概念

总体：研究对象的某项数量指标的值的全体。

个体：总体中的每个元素为个体。

例如：某工厂生产的灯泡的寿命是一个总体，每一个灯泡的寿命是一个个体；某学校男生的身高的全体一个总体，每个男生的身高是一个个体。

定义：设X是具有分布函数F的随机变量，若$X_1,\cdots X_n$是具有同一分布函数F的相互独立的随机变量，则称 $X_1,\cdots X_n$ 为从总体X中得到的容量为n的简单随机样本，简称为样本，其观察值$x_1,\cdots x_n$称为样本值。

由定义知：若$X_1,\cdots,X_n$为X的一个样本，则$X_1,\cdots,X_n$的联合分布函数为：

$$F^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

若设X的概率密度为f，则 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合概率密度为：

$$f^*(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

抽样分布

1. 定义：设 $X_1,\cdots X_n$ 为来自总体X的一个样本，$g(X_1,\cdots X_n)$ 是 $X_1,\cdots X_n$ 的函数，若g是连续函数，且g中不含任何未知参数；

则称$g(X_1,\cdots X_n)$是一个统计量。

设 $x_1,\cdots x_n$是相应于样本$(X_1,\cdots X_n)$的样本值。

则称$g(x_1,\cdots x_n)$是$g(X_1,\cdots X_n)$的观察值。

注：统计量是随机变量。

例1

设 $X_1,\cdots X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中μ未知，σ^2已知，问下列随机变量中那些是统计量

$$\min(X_1,X_2,\cdots,X_n);\ \frac{X_1+X_n}{2};\ \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\ ;$$

$$\frac{(X_1+X_n)^2}{\sigma^2};\ \frac{(X_1+\cdots+X_n)-n\mu.}{\sqrt{n}\sigma}.$$

2. 常用的统计量

样本均值： $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-n\overline{X}^2]$

样本标准差：$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$

样本k阶(原点)矩：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^k \quad k=1,2,\cdots$

样本k阶中心矩：$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \quad k=1,2,\cdots$

它们的观察值分别为：

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\overline{x}^2]$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,k}, \quad k = 1,2\cdots$$

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, \quad k = 1,2\cdots$$

分别称为样本均值、样本方差、样本标准差、样本**k**阶矩、样本**k**阶中心矩。

统计量是样本的函数，它是一个随机变量，统计量的分布称为抽样分布。

- **性质** 若总体 X 的期望为 μ，方差为 σ^2，则
- （1） $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$ ；
-
- （2） $D(\bar{X}) = \dfrac{D(X)}{n} = \dfrac{\sigma^2}{n}$ ；
-
- （3） $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$.