§1.2 行列式的性质

❖行列式的转置

将行列式D的行变为列后得到的行列式称为**D的转置行列式**, 记为D'或D^T. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 则\ D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

显然，如果

$$D^T=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \qquad 则 b_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n).$$

❖ 行列式的性质

❖性质1

行列式D与它的转置行列式D^T相等. >>>

由此性质可知, 行列式中的行与列具有同等的地位, 行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立, 反之同.

❖性质2

互换行列式的两行, 行列式变号.

❖性质3

如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

❖性质4

行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

•推论

行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

❖**性质5** 若行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，则行列式等于两个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

❖**性质6**

行列式中如果有两行(列)元素成比例，则行列式等于零.

定理 n 阶行列式等于它的任一行（列）的各元素与其相对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad \text{（按第 } i \text{ 行展开）} \qquad (1)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad \text{（按第 } j \text{ 列展开）} \qquad (2)$$

在运用定理来计算行列式时，我们总是按含0最多的行或列来展开行列式，因为0位置的代数余子式乘以0后仍然是0。

例4　证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证：由定理将行列式按第1行展开，

$$D = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对这个$n-1$阶行列式再按第1行展开有：

$$D = a_{11} \cdot a_{22} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这样逐步推下去，则得到 $D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

称n 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为上三角行列式。

型如例4的行列式称为下三角行列式，它们统称为三角形行列式。

显然，

n阶三角形行列式等于它的主对角线上元素的乘积

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

例5 计算 $D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

解： 由定理 7.1 将行列式 D 按第三行展开，因为除 $a_{33}=1$ 外，其余的 a_{31}、a_{32}、a_{34} 均为 0，

D 展开后得

$$D=0+0+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}+0$$

$$D = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-5)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -13 & -1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (-5) \cdot (1) \cdot (-2) + (-5) \cdot (-1) \cdot (6) = 10 + 30 = 40$$

对任意的n阶行列式可用行列式性质将其化为三角形行列式，这时计算n阶行列式的值即转化为计算三角形行列式主对角线上的元素相乘的积。

❖符号规定

在计算行列式时，可以使用如下记号以便检查:

交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

第 i 行(或列)提出公因子 k, 记作 $r_i \div k$ (或 $c_i \div k$).

以数k乘第j行(列)加到第i行(列)上，记作$r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$)

例6 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40.$$

例7 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$\overset{c_1 \div 6}{=\!=} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{=\!=}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$=6\times 8=48.$

例8 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$

解

$$D \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$