§ 2.3 逆矩阵

定义 1：对于 n 阶方阵 A ，如果有一个 n 阶方阵 B ，使 $AB = BA = E$ （E 为单位矩阵），就认为方阵 A 是可逆的，并把方阵 B 称为 A 的逆矩阵。A 的逆矩阵记作 A^{-1} 。

定理 1：若方阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$ 。

证：A 可逆，则有 A^{-1}，使 $AA^{-1} = E$ 。

因此 $|A||A^{-1}| = |E| = 1$，所以 $|A| \neq 0$ 。证毕。

例如 $$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 3 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

因为 $$AB=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 3 & 4 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 3 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即 A、B 满足 $AB=BA=E$，所以矩阵 A, B 互逆，并且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$.

例 因为 $EE=EE=E$ 所以 E 可逆，且 $E^{-1}=E$，即单位矩阵的逆矩阵是它本身.

定理 2： 若 $|A| \neq 0$，则方阵 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$，其中 A^* 称为方阵 A 的伴随方阵，

它是 $|A|$ 的各个元素的代数余子式所构成的方阵，

它表示如下：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

定义 2 当 $|A| = 0$ 时，A 称为奇异方阵，否则称

为非奇异方阵

由此可见，A可逆的充分必要条件是$|A| \neq 0$，即

可逆方阵是非奇异方阵。

推论：若$AB = E$(或$BA = E$)，则$B = A^{-1}$。

证：$|A||B| = |E| = 1$，故$|A| \neq 0$，因此A^{-1}存在，

所以

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB)$$

$$= A^{-1}E = A^{-1}$$。证毕。

本推论说明如果方阵A是可逆的，则其逆矩阵是惟一的.

方阵的逆矩阵的运算规律：

1）若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

2）若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

3）若 A,B 为同阶方阵且均可逆，则 AB 也可逆，

且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4）若 A 可逆，则 A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

例1　求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：因为 $|A|=2\neq0$，所以 A^{-1} 存在，又因为：

$A_{11}=2,\quad A_{21}=6\quad A_{31}=-4,\quad A_{12}=-3$

$A_{13}=2,\quad A_{23}=2\quad A_{22}=-6,\quad A_{32}=5$

$A_{33}=-2$

则：$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

对于任给的n阶方阵 A，在什么条件下可逆？如果A可逆，如何求它的逆矩阵A^{-1}？下面我们来解决这两个问题.

记 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，其中$A_{ij}$是行列式$|A|$的元素$a_{ij}$的代数余子式，$i, j = 1,2,\ldots,\ n$. A^*称为n阶方阵A的伴随矩阵。

引理 设A^*、$|A|$分别是n阶方阵A的伴随矩阵及行列式，那么$AA^* = A^*A = |A|E.$

定理 3　n阶方阵A可逆的充分必要条件是

$$|A| \neq 0，且 \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

证明　必要性　设A可逆且逆为A^{-1}，则$AA^{-1} = E$，两边取行列式，有

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 1$$

所以$|A| \neq 0$.

充分性　由引理有　$AA^* = A^*A = |A|E$

由于$|A| \neq 0$，故有　$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E$$

由逆矩阵定义及唯一性知，A可逆并且$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$

当$|A| \neq 0$时，称 A 为非奇异矩阵.

上述定理也可以叙述为：n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为非奇异矩阵.

例 2 求矩阵 A 的逆矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

解 因为 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0,$

所以 A 可逆.

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\ ,\ A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=6\ ,$$

又 $$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5, A_{21}\equiv(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4\ ,A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\ ,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1,$$

于是

$$A^*=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\6&-4&-1\\-5&3&1\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{-1}A^*=\begin{bmatrix}-2&1&1\\-6&4&1\\5&-3&-1\end{bmatrix}.$$

例 $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&1\end{pmatrix}$

求矩阵 X ,使 $AXB=C$

解 若A^{-1},B^{-1}存在,则 $A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

$X=A^{-1}CB^{-1}$ $|A|=1$,$|B|=2$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 1 & -10 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -20 & 14 \\ 6 & 40 & -28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -10 & 7 \\ 3 & 20 & -14 \end{pmatrix}$$

例 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-3A-2E=O$,证明 $A, A-3E$ 都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明: 由 $A^2-3A-2E=O$ 得

$$A(A-3E)=2E$$ 于是

由 $A\cdot\frac{1}{2}(A-3E)=E$,知 A 可逆,且

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E)$$

由 $\frac{1}{2}A\cdot(A-3E)=E$,知 $A-3E$ 可逆,且

$$(A-3E)^{-1}=\frac{1}{2}A$$