§3.2 向量组的线性组合

一、n 维向量的概念

1　定义1　n 个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的数组称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量（或第 i 个坐标）.

$\alpha^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$　行向量　即 $1 \times n$ 矩阵

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$　列向量　即 $n \times 1$ 矩阵

2．零向量　$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$

3．负向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

4．向量的相等

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow \boldsymbol{a_i}=\boldsymbol{b_i}\ (\boldsymbol{i}=1,2,\cdots,\boldsymbol{n})$$

5．向量组

同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合称为向量组

二、 n 维向量的线性运算

1．加法与数乘 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

k 为任意实数，则

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n),$$

2．加法与数乘的运算规律（略）

注：利用向量的运算，对于方程组 $Ax=b$ $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},(j=1,2,\cdots,n)\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则

$$Ax=b\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=b$$

向量的运算规则：

（设 α,β,γ 都是 n 维向量，λ,μ 是实数）

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

$$\alpha+0=\alpha \qquad \alpha+(-\alpha)=0$$

$$1\alpha=\alpha \qquad \lambda(\mu\times\alpha)=(\lambda\times\mu)\alpha$$

$$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta \qquad (\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$$

三、 向量组的线性组合与线性表示

定义2 (1) 给定向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,表达式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 称为向量组 A 的一个线性组合, $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为该线性组合的系数

(2)给定向量组 $\boldsymbol{A}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量 β ,如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

则称 β 是向量组的线性组合，或称 β 可由向量组 A 线性表示

定理1 β 可由向量组 A 线性表示 的**充分必要条件**是

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的秩等于矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$ 的秩

注：设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$

β 可由向量组 A 唯一线性表示 的**充分必要条件**是

$$R(A)=R(B)=m$$

例 $\alpha_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}},\beta=(0,4,2)^{\mathrm{T}}$

试问β 能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？若能，写出具体表示式

解

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&3&1&4\\3&1&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$R(A)=R(B)=3$$

所以β 能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 惟一线性表示，且

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

例 $\alpha=(2,-3,0),\beta=(0,-1,2),\gamma=(0,-7,-4)$

$$B=(A,\gamma^{\mathrm{T}})=(\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}},\gamma^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&-1&-7\\0&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

因为,

$$R(A)=2,R(B)=3$$

所以, γ 不能由 α , β 线性表示

四、 向量组间的线性关系

定义3 设两个向量组

$$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \quad ,B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$$

若向量组 A 中的每个向量都可由向量组 B 线性表示，
则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示

若向量组 A 与向量组 B 可以互相线性表示，
则称向量组 A 与向量组 B 等价

定理2 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \quad ,B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r) \quad ,B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

向量组 A 可由向量组 B 线性表示 $\Leftrightarrow R(B)=R(A,B)$

推论： 向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A,B)$