§ 3.4 向量组的秩

向量组的最大无关组：一个给定的n维向量组中，如有r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而此组中任何多于$r$个向量均线性相关（即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为向量组内所含的具有最多个数的线性无关向量组），称

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为此向量组的一个最大无关组.

注：一个向量组的最大无关组有时并不惟一，但其个数 r 是该向量组所能含有的线性无关的向量的最多个数，是惟一的，称此为向量组的秩。

定理 1：设有两个 n 维向量组 A： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，B： $_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ ，如果 A 组线性无关，且 A 组可由 B 组线性表示，则 A 组向量数 r 不大于 B 组向量数 s ，即 $r \leq s$ 。

推论 1：等价的线性无关向量组所含的向量个数相同，即等价向量组的秩相同。

推论 2：在一个向量组中，它的任意两个最大无关向量组的向量个数相同，即一个向量组的秩惟一。

例　求向量组(2,1,-1)，(1,2,1)，(1,1,0)的秩，并写出它的最大无关向量组。

解： 通过计算可知该向量组的秩为2，它的最大无关向量组是(2,1,-1)，(1,2,1)或(2,1,-1)，(1,1,0)或(1,2,1)，(1,1,0)。

例 判断向量组(1,4,1,0)，(2,1,-1,-3)，(1,0,-3,-1)，(0,2,-6,3)是否线性相关？

解： 由此向量组构成的方阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

通过计算可知A中只有一个4阶子式且它的值为零，因此$R(A)<4$，所以这个向量组线性相关.

在此要注意矩阵的秩的应用。

例　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

解　对 A 施行初等行变换化为行阶梯形矩阵:

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

知 $r(A)=3$，故列向量组的极大无关组含3个向量.

而三个非零首元在第 1,2,4 三列，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为列向量组的一个极大无关组.

$\Longrightarrow$ $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关.

由 A 的行最简形矩阵：$\begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4 \end{cases}$.

例　求向量组

$$\alpha_1=(1,2,-1,1)^T,\qquad \alpha_2=(2,0,t,0)^T,$$

$$\alpha_3=(0,-4,5,-2)^T,\quad \alpha_4=(3,-2,t+4,-1)^T$$

的秩和一个极大无组.

解 向量的分量中含参数 t, 向量组的秩和极大无关组与 t 的取值有关. 对下列矩阵作初等行变换:

$$(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&t&5&t+4\\1&0&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&t+2&5&t+7\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&0&3-t&3-t\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

向量的分量中含参数 t, 向量组的秩和极大无关组与 t 的取值有关. 对下列矩阵作初等行变换:

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3-t & 3-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 α_1, α_2 线性无关, 且

(1) $t = 3$ 时, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = 2$, 且 α_1, α_2 是极大无关组;

(2) $t \neq 3$ 时, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) = 3$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是极大无关组.