第四章　随机事件及其概率

§4.1 随机事件

一、随机事件

在生活当中，经常接触到**事件的概率**，

比如：　降水 概率为 30%，

某强队对弱队 赢球 的概率为 80%，

某个固定群体中 男女比例 为 54：46；

这种在个别实验中其结果呈现出不确定性；

在大量重复实验中其结果又具有统计规律性的现象，

我们称之为随机现象，概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科。

随机试验（Experiment ）

这里试验的含义十分广泛，它包括各种各样的科学实验，也包括对事物的某一特征的观察。其典型的例子有：

E_1：抛一枚硬币，观察正面H（Heads）、反面T（Tails）出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面、反面出现的情况。

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数。

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数。

E_5：记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最高温度。

这些实验具有以下特点：

•可以在相同的条件下重复进行；

•每次实验的可能结果不止一个，并且能事先明确实验的所有可能结果；

•进行一次实验之前不能确定哪一个结果会出现。

样本空间(*S*pace)

定义　将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间， 记为 S 。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点。

S_1： { H , T }

S_2： { HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT }

S_3： { 0, 1, 2, 3 }

S_4： { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

E_5：记录寻呼台一分钟内接到的呼唤次数。

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最高温度。

$S_5 : \{0,1,2,3\ldots\ldots\}$

$S_6 : \{\ t \mid\ t \geq 0\ \}$

$S_7 : \{\ (x , y) \mid T_0 \leq x , y \leq T_1\ \}$

随 机 事 件

定义：

• *随机事件*：称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件；

• *基本事件*：有一个样本点组成的单点集；

• *必然事件*：样本空间 S 本身；

• *不可能事件*：空集$\varnothing$。

我们称一个随机事件发生当且仅当它所包含的一个样本点在试验中出现.

例如：S_2 中事件 A={HHH,HHT,HTH,HTT}

表示“第一次出现的是正面”

S_6 中事件 $B_1=\{t|t<1000\}$

表示“灯泡是次品”

事件 $B_2=\{t|t \geq 1000\}$

表示“灯泡是合格品”

事件 $B_3=\{t|t\geq 1500\}$

表示“灯泡是一级品”

二、 事件间的关系与运算

1^0 包含关系 $A \subset B$

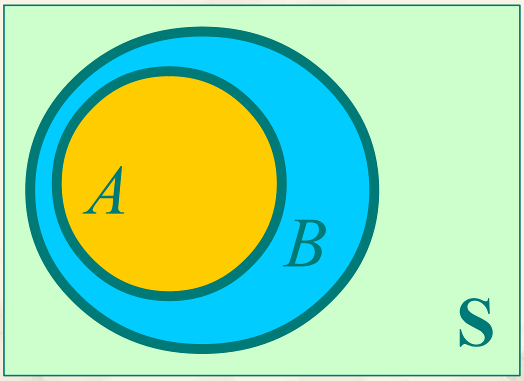
2^0 和事件 $A \bigcup B$

3^0 积事件 $A \bigcap B$

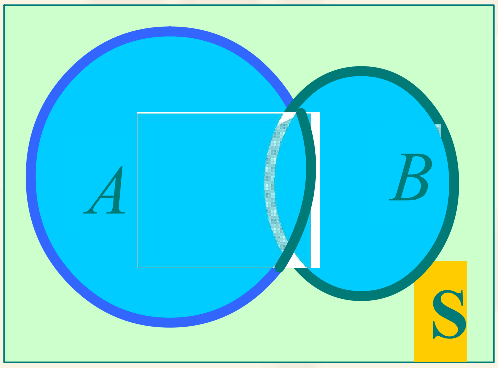
4^0 差事件 $A - B$

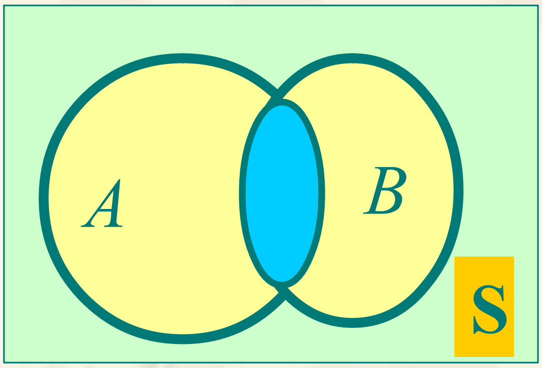
5^0 互不相容 $A \bigcap B = \varnothing$

6^0 对立事件 $A \bigcap B = \varnothing$ $A \bigcup B = S$



2^0 和事件 $A \bigcup B$ 3^0 积事件 $A \bigcap B$



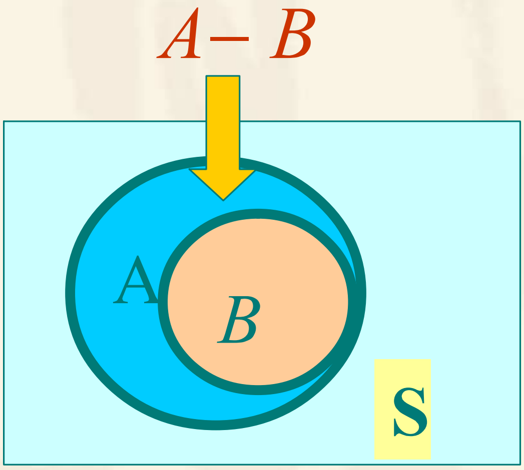


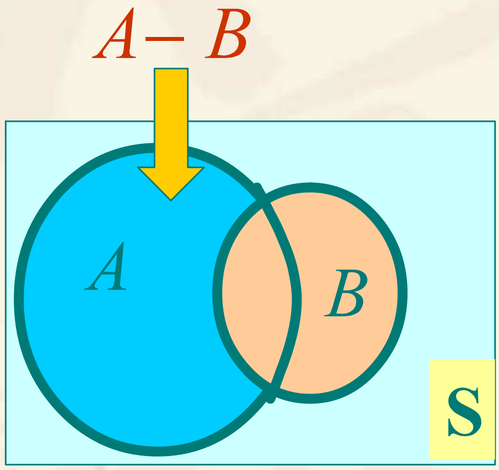
S_2 中事件

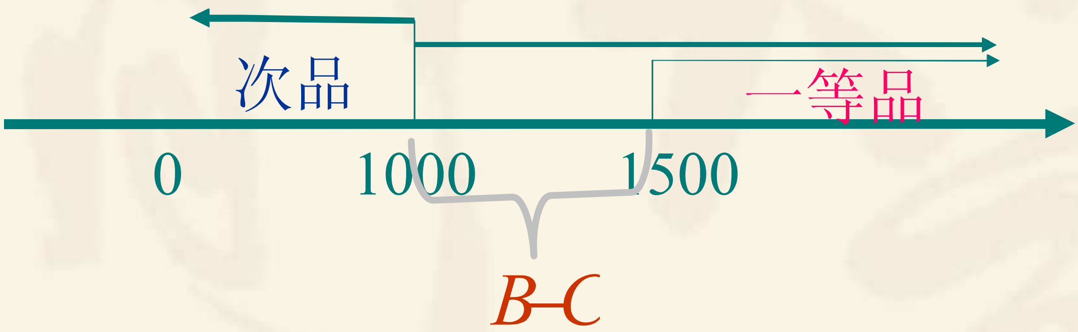
A={HHH,HHT,HTH,HTT}, B={HHH,TTT}

$A \bigcup B$=? $A \bigcap B$=?

4^0 差事件 $A-B$







$S_6:\{t \mid t \geq 0\}$中

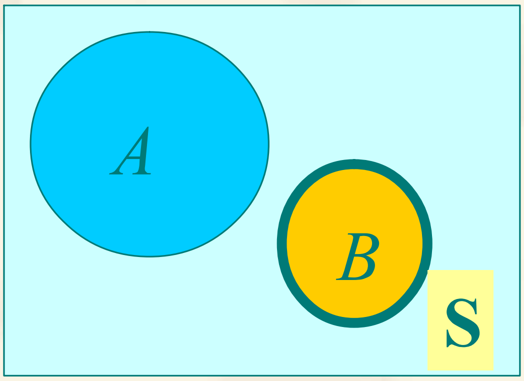
事件$A=\{t \mid t<1000\}$ “次品”

事件$B=\{t \mid t \geq 1000\}$ “合格品”

事件$C=\{t \mid t \geq 1500\}$ “一等品”

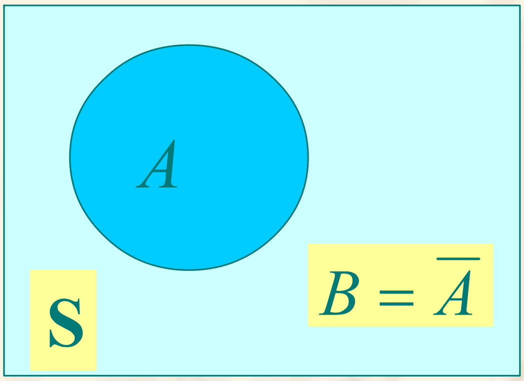
5^0 互不相容

$A \cap B = \varnothing$



6^0 对立事件 $A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = S$



随机事件的运算规律

幂等律： $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

交换律： $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

De Morgan定律:

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A}_{\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A}_{\alpha}$$

例 1 在管理系学生中任选一名学生，令事件 A 表示选出的是男生，事件 B 表示选出的是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 什么条件下 $ABC = C$ 成立？

(3) 什么条件下 $C \subset B$？

(4) 什么条件下 $\overline{A} = B$ 成立？

解 (1) $AB\overline{C}$ 是指当选的学生是三年级男生，但不是运动员.

（2）只有在 $C \subset AB$，即 $C \subset A$，$C \subset B$ 同时成立 的条件下才有 $ABC = C$ 成立，即只有在全部运动员都是男生， 且全部运动员都是三年级学生的条件下才有 $ABC = C$.

（3）$C \subset B$ 表示 全部运动员都是三年级学生，也就是说， 若当选的学生是运动员， 那么一定是三年级学生， 即在除三年级学生之外， 其它年级没有运动员当选 的条件下才有 $C \subset B$.

(4) $\overline{A} \subset B$ 表示 当选的女生一定是三年级学生, 且 $B \subset \overline{A}$ 表示 当选的三年级学生一定是女生. 换句话说, 若选女生, 只能在三年级学生中选举, 同时若选三年级学生 只有在女生中选举. 在这样的条件下, $\overline{A} \subset B$ 成立.

例　化简下列事件:

(1) $(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$;　(2) $A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}$.

解 (1) $(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$

$$=[\overline{A}(\overline{A}\cup B)]\cup[\overline{B}(\overline{A}\cup B)]$$ (分配律)

$$=(\overline{A}\overline{A}\cup\overline{A}B)\cup(\overline{B}\overline{A}\cup\overline{B}B)$$

$$=(\overline{A}\cup\overline{A}B)]\cup(\overline{B}\overline{A}\cup\varnothing)$$ (因 $\overline{A}B\subset\overline{A}$)

$$=\overline{A}\cup\overline{B}\overline{A}=\overline{A}.$$

(2) $A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}$

$$= A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B}$$

$$= A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}$$ (交换律)

$$= (A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B}) \cup (\overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B})$$ (结合律)

$$= (A \cup \overline{A})\overline{B} \cup \overline{A}(B \cup \overline{B})$$

$$= \overline{B} \cup \overline{A} = \overline{AB}.$$ (对偶律)