§2.4 分块矩阵

定义 7.13： 把矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每个小矩阵称为 A 的**子块**，以子块为元素形成的矩阵称为**分块矩阵**.

例： 将4×3矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ 分成子块的方法

很多，在此列举两种出来：

$$\left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{array}\right)$$

分法（1）可记为： $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

其中： $A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$ $A_{12}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$ $A_{22}=\begin{pmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$

分块矩阵的运算规则：

其运算规则与普通矩阵的运算规则相似

1）设矩阵A与B的行数相同、列数相同，而且采用相同的分块方法，则有：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数、列数相同，那么：

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1}+B_{m1} & \cdots & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix}$$

2）设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$，$\lambda$为数，则

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda A_{m1} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

3）设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，分块成：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{j1} & \cdots & A_{jt} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，则：

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{j1} & \cdots & C_{jr} \end{pmatrix}$$

其中：$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{lj},(i=1,2\cdots j,j=1,2\cdots r)$$

4）设：$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$ 则： $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{m1}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n}^T & \cdots & A_{mn}^T \end{pmatrix}$

5）设 A 为 m 阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都是零矩阵，且非零子块都是方阵，即：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix}$$

其中， $A_i\,(i=1,2\cdots n)$ 都是方阵，称 A 为分块对角方阵。

分块对角矩阵性质 $|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|$

若$A_i(i=1,2,\cdots s)$ 都可逆,则 A 可逆,且 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$

$|A| = |A_1||A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}|6| = 5\times 6 = 30 \neq 0$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$A_2 = (6), A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$