

# 第五章 随机变量及其分布

- 随机变量
  - ❖ 离散型随机变量的概率分布
  - ❖ 随机变量的分布函数
  - ❖ 连续型随机变量的概率密度
  - ❖ 随机变量的函数的分布

## § 5.1 随机变量

### 一. 随机变量的概念

#### 例 1

袋中有3只黑球，2只白球，从中任意取出3只球，观察取出的3只球中的黑球的个数.

我们将3只黑球分别记作1, 2, 3号, 2只白球分别记作4, 5号, 则该试验的样本空间为

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} (1, 2, 3) & (1, 2, 4) & (1, 2, 5) \\ (1, 3, 4) & (1, 3, 5) & (1, 4, 5) \\ (2, 3, 4) & (2, 3, 5) & (2, 4, 5) \\ (3, 4, 5) & & \end{array} \right\}$$

## 例 1 (续)

我们记取出的黑球数为  $X$ ，则  $X$  的可能取值为 1, 2, 3.

因此， $X$  是一个变量.

但是， $X$  取什么值依赖于试验结果，即  $X$  的取值带有随机性，

所以，我们称  $X$  为随机变量.

$X$  的取值情况可由下表给出：

## 例 1 (续)

样本点	黑球数 $X$	样本点	黑球数 $X$
(1, 2, 3)	3	(1, 4, 5)	1
(1, 2, 4)	2	(2, 3, 4)	2
(1, 2, 5)	2	(2, 3, 5)	2
(1, 3, 4)	2	(2, 4, 5)	1
(1, 3, 5)	2	(3, 4, 5)	1

## 例 1 (续)

由上表可以看出，该随机试验的每一个结果都对应着变量  $X$  的一个确定的取值，因此变量  $X$  是样本空间  $S$  上的函数：

$$X = X(e) \quad (e \in S)$$

- ❖ 我们定义了随机变量后，就可以用随机变量的取值情况来刻划随机事件。例如

$$\{e: X(e) = 2\} = \{X = 2\}$$

表示取出2个黑球这一事件；

$$\{X \geq 2\}$$

表示至少取出2个黑球这一事件，等等。

## 随机变量的定义

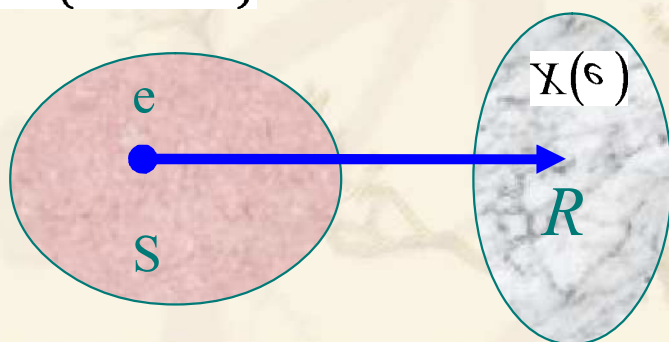
设 $E$ 是一个随机试验， $S$ 是其样本空间。我们称样本空间上的函数

$$X = X(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

为一个随机变量，如果对于任意的实数  $x$ ，集合

$$\{\omega: X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$$

都是随机事件。



## 说 明

(1) 随机变量常用大写的英文字母

$X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 、...

或希腊字母

$\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$ 、...

等来表示.

(2) 对于随机变量, 我们常常关心的是它的取值.

(3) 我们设立随机变量, 是要用随机变量的取值来描述随机事件.

## 例 2

掷一颗骰子，令：

$X$ ：出现的点数.

则  $X$  就是一个随机变量. 它的取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\{X \leq 4\}$$

表示掷出的点数不超过 4 这一随机事件；

$$\{X \text{ 取偶数}\}$$

表示掷出的点数为偶数这一随机事件.



### 例 3

一批产品有 50 件，其中有 8 件次品，42 件正品。现从中取出 6 件，令：

$X$ ：取出 6 件产品中的次品数。

则  $X$  就是一个随机变量。它的取值为 0, 1, 2, ..., 6.

$$\{X = 0\}$$

表示取出的产品全是正品这一随机事件；

$$\{X \geq 1\}$$

表示取出的产品至少有一件这一随机事件。

## 例 4

上午 8:00~9:00 在某路口观察, 令:

$Y$ : 该时间间隔内通过的汽车数.

则  $Y$  就是一个随机变量. 它的取值为  $0, 1, \dots$

$$\{Y < 100\}$$

表示通过的汽车数小于 100 辆这一随机事件;

$$\{50 < Y \leq 100\}$$

表示通过的汽车数大于 50 辆但不超过 100 辆这一随机事件.

**注意  $Y$  的取值是可列无穷个!**

## 例 5

观察某生物的寿命（单位：小时），令：

$Z$ ：该生物的寿命.

则  $Y$  就是一个随机变量. 它的取值为所有非负实数.

$$\{Z \leq 1500\}$$

表示该生物的寿命不超过1500小时这一随机事件.

$$\{Z > 3000\}$$

表示该生物的寿命大于 3000小时这一随机事件.

## 例 6

掷一枚硬币，令

$$X = \begin{cases} 1 & \text{掷硬币出现正面} \\ 0 & \text{掷硬币出现反面} \end{cases}$$

则 $X$ 是一个随机变量.

## 说 明

在同一个样本空间上可以定义不同的随机变量.

## 例 7

掷一枚骰子，在例2中，我们定义了随机变量 $X$ 表示出现的点数。我们还可以定义其它的随机变量，例如我们可以定义：

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{出现偶数点} \\ 0 & \text{出现奇数点} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{点数为6} \\ 0 & \text{点数不为6} \end{cases}$$

等等.