§ 2.6 矩阵的秩

矩阵秩的概念

定义1 设矩阵 A 为 $m\times n$ 型矩阵,在 A 中选定 r 行 r 列 $(1\le r\le \min\{m,n\})$,则位于这 r 行 r 列交叉位置上的 r^2 个元素按照原来的排列方式构成一个 r 阶方阵,称为矩阵 A 的 r 阶子矩阵, A 的 r 阶子方阵的行列式称为 A 的 r 阶子式.

定义2 设矩阵 A 中存在 r 阶非零子式,并且所有的 $r+1$ (如果存在的话)阶子式全为零,则称矩阵 A 的秩为 r ,记作 $R(A)=r$,并称该 r 阶子式为矩阵 A 的最高阶非零子式.

用初等变换求矩阵的秩

定理1 若矩阵 A 与矩阵 B 等价,则 $R(A)=R(B)$

例 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

的秩.

解 对 A 施行初等行变换到行阶梯形,即

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 7\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & -8 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & -8 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\0 & -1 & 5\\0 & 0 & 18\\0 & 0 & -33\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+\frac{33}{18}r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\0 & -1 & 5\\0 & 0 & 18\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

由于$R(B)=3$,因此 $R(A)=3$

例 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\-2 & 4 & 2 & 6 & -6\\2 & -1 & 0 & 2 & 3\\3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

的秩,并求A 的一个最高阶非零子式.

解 先求 A 的秩,为此对 A 作初等行变换,将 A 化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\longleftrightarrow r_4]{r_2\longleftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\\0&0&0&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

上式最后一个矩阵是行阶梯形矩阵,其非零元素行的行数为3

因此$R(B)=3$.所以 $R(A)=3$

下面再求A的一个最高阶非零子式.为此先求B的一个最高阶非零子式.显然在B 中,第 $1,2,3$行与第 $1,2,4$ 列的元素构成的三阶子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

为B的一个最高阶非零子式,同时注意到在求A的秩时我们只对A作了初等行变换,B中第 $1,2,3$ 行分别与A中$1,3,4$ 行对应,而B 的第 $1,2,4$列即为A 的第 $1,2,4$ 列,因此得出 A 的最高阶(三阶)非零子式为

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

例 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 用初等行变换变成阶梯矩阵并求出它的秩。

解:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-\frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于其中非零行的个数为 2，因此 $R(A)=2$。

注：矩阵在作初等变换时中间不能用等号.

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：首先把它写成(A,I)的形式，然后再对其进行初等行变换，直到得出结果。即：

$$(A,I)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

因此：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$