

安徽师范大学

2016 年招收硕士研究生考题

科目名称: 高等数学 II 科目代码: 724

考生请注意: 答案必须写在答题纸上, 写在本考题纸上的无效!

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 21 分):

1. 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \lg(x-2)$, 那么 $f(x+\frac{1}{4}) + f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域是 ().
A. $(\frac{7}{4}, \frac{11}{4})$ B. $(\frac{9}{4}, \frac{13}{4})$ C. $(\frac{9}{4}, \frac{11}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, \frac{13}{4})$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = ()$.
A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. 0
3. 已知 $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2} = 2$, 则 a, b 的值是 ().
A. $a=-8, b=2$ B. $a=2, b=-8$ C. $a=2, b$ 为任意值 D. a, b 均为任意值
4. 在曲线 $y = \ln x$ 与直线 $x = e$ 的交点处, 曲线 $y = \ln x$ 的切线方程是 ().
A. $x - ey = 0$ B. $ex - y = 0$ C. $x - ey - 2e = 0$ D. $ex - y - 2e = 0$
5. 设在 $[0, 1]$ 上有 $f''(x) > 0$, 则下列不等式正确的是 ().
A. $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$ B. $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$
C. $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$ D. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$
6. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, ().
A. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量 B. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小量
C. $f(x)$ 与 x 是同阶非等价无穷小量 D. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量
7. 已知广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+kx^2}$ 收敛于 1 ($k > 0$), 则 $k = ()$.
A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi^2}{2}$ D. $\frac{\pi^2}{4}$

考生请注意：答案必须写在答题纸上，写在本考题纸上的无效！

二、填空题（每小题3分，共21分）：

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ _____.
2. 函数 $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ 的间断点有 _____ 个.
3. 设函数 $y = x \ln x$ ，则 $y^{(2016)} =$ _____.
4. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式极限，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 4$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} =$ _____.
5. 设 $\int f(x) dx = \sin x + C$ ，则 $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____.
6. 设 $\frac{d}{dx} \int_0^{e^{-x}} f(t) dt = e^x$ ，则 $f(x) =$ _____.
7. 设 $\vec{a} = (2, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (4, -1, 10)$ ， $\vec{c} = \vec{b} - \lambda \vec{a}$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{c}$ ，则 $\lambda =$ _____.

三、解答题（每小题10分，共80分）：

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$.
2. 利用带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式，求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.
3. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t, \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
4. 求函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 的极值和单调区间以及拐点和凹、凸区间.
5. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx$.
6. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.
7. 由 $y = x^3$ ， $x = 2$ ， $y = 0$ 所围成的图形，分别绕 x 轴及 y 轴旋转，求所得两个旋转体的体积.
8. 求过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行的直线方程.

考生请注意：答案必须写在答题纸上，写在本考题纸上的无效！

四、证明题（每小题 7 分，共 28 分）：

1. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。
2. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有且只有一个正根。
3. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(1) = 0$ 。证明存在一点 $\xi \in (0, 1)$ ，使
$$2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$
4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，证明

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

由此计算

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$