中 山 大 学

2018年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：601

科目名称：高等数学(A)

考试时间：2017年12月24日上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！答题要写清题号，不必抄题。

本卷共十五大题，每题10分，满分为150分。

一、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\tan x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 求$f'(0)$。

二、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1.\end{cases}$ 请问a取何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=1$连续。

三、求函数 $f(x)=\cos^2 x+\cos x+1$的极值。

四、计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(|x|+x\right)e^{-|x|}\,dx$。

五、曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形，求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

六、求累次积分 $I=\int_0^b dx\int_x^b e^{y^2}dy$。

七、计算曲面积分 $I=\iint\limits_S yz\,dz\,dx+zx\,dx\,dy$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$。

八、求微分方程 $y''+y'=x-2$ 的通解。

九、求幂级数$\sum_{0}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$的收敛半径、收敛区间和收敛域。

十、证明无穷积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛。

十一、已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似，求矩阵 $A+E$ 的秩，其中矩阵 $E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 为单位矩阵。

十二、设 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}1\\1/2\\0\end{bmatrix}$，$\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}$，$A=\alpha\beta^T$，$B=\beta^T\alpha$，其中 β^T 是 β 的转置，求解方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$。

十三、设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $r(A)=r<n$，$\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为非齐次线性方程组 $AX=B$ 的 $n-r+1$ 个线性无关解，证明：$\xi_1-\xi_0,\xi_2-\xi_0,\cdots,\xi_{n-r}-\xi_0$ 是其导出组 $AX=O$ 的基础解系。

十四、求非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1+x_2-3x_3+x_4=5\\x_1+3x_2-9x_3-5x_4=-1\end{cases}$$

的通解，并用其导出组的基础解系表示。

十五、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2。

(1) 求 a 的值；(2) 求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。