山东科技大学2018年全国硕士研究生招生考试

数学分析试卷

一、极限问题（共20分，每小题10分）

1、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-1}$。

2、设$a_1>0,\sigma>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}),n=1,2,\cdots$。

证明： 数列$\{a_n\}$收敛，且其极限为$\sqrt{\sigma}$。

二、一元函数的微分（共20分，每小题10分）

1、已知$y^2+2\ln y=\sin^2 x$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

2、设$f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\ge 0,\\ x^\alpha, & x<0,\end{cases}$ 问：当α为何值时？

（1）在$x=0$连续； （2）在$x=0$可导，并求$f'(0)$。

三、一元函数的积分（共10分） 求积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{xdx}{1-\cos 2x}$。

四、一元函数微积分及应用（共10分）设$f(x)$在$[0,1]$上可微且

$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$。证明：$\exists\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

五、一元函数连续性和微积分（共15分）

设$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ （A为常数）。

（1）求导函数$g'(x)$； （2）讨论导函数$g'(x)$在$x=0$处的连续性。

六、幂级数问题（共 **12** 分，第 **1** 题 **8** 分，第 **2** 题 **4** 分）

1、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$ $(-1<x<1)$的和函数。 2、求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^{n}}$ 的值。

七、 多元函数的微分（共 **12** 分）已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$$

试证：$f(x,y)$在$(0,0)$处连续且存在偏导数，但不可微。

八、证明题（共 **15** 分，第 **1** 题 **8** 分，第 **2** 题 **7** 分）

1、设$f(\xi,\eta)$具有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程：$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=0$，

试证： 函数$z=f(x^2-y^2,2xy)$也满足拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

2、证明：含参量积分$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx$，当$0\leq\alpha<+\infty$时收敛但不一致收敛。

九、重积分问题（共 **12** 分） 设$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$其中$f(u)$为连续可导函数且$f(0)=0, f'(0)=1$。试证：$\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\frac{F(t)}{t^5}-\frac{\ln(1+4\pi t)}{e^{5t}-1}\right]=0$。

十、曲线积分（共 **12** 分） 计算曲线积分$\oint\limits_{\Gamma}3ydx-xzdy+yz^2dz$，其中$\Gamma$是圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ z=2\end{cases},$$ 从z轴正向看去，取逆时针方向。

十一、曲面积分（共 **12** 分）计算第二型曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+2y^3dzdx+3z^3dxdy$ **其中，**Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$在第一卦限部分，方向取上侧。