

# 冲击扰动对超低摩擦型冲击地压影响分析

李丽萍<sup>1</sup>, 李卫军<sup>1</sup>, 潘一山<sup>1, 2</sup>

(1. 辽宁工程技术大学 力学与工程学院, 辽宁 阜新 123000; 2. 辽宁大学 物理学院, 辽宁 沈阳 110036)

**摘要:** 高地应力和开采强扰动下, 深部煤岩体极易发生超低摩擦效应, 继而诱发超低摩擦型冲击地压。通过建立考虑上覆岩层压力的块系岩体超低摩擦效应理论模型, 对块体逐一进行受力分析, 推导得到块体间新法向力公式和工作块体新水平位移公式, 理论分析其受垂直和水平双向扰动后的动力响应, 获得法向力最小值在各块体间的分布特征及水平冲击载荷频率和延迟时间对工作块体水平位移影响规律。研究表明: 最容易发生超低摩擦效应的接触面位置为离垂直冲击源最近的 3 个接触面。块体间法向力减小导致块体间摩擦力降低, 如遇水平扰动, 极易诱发超低摩擦型冲击地压。水平冲击幅值确定时, 工作块体水平运动存在特定的延迟时间及水平冲击频率范围, 且工作块体的水平位移随延迟时间及水平冲击幅值的变化呈现周期性变化规律。发现工作块体水平运动开始时刻滞后于水平冲击作用时刻, 存在滞后时间, 其后将依次经历变加速和变减速运动, 最终处于静止状态。块体间法向力变化是超低摩擦效应发生的前提条件, 水平扰动是引起工作块体水平位移的直接原因。

**关键词:** 岩石力学; 超低摩擦效应; 冲击载荷; 冲击地压; 块系岩体; 法向力; 水平位移

**中图分类号:** TU 45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2019)01 - 0111 - 10

## Influence of impact disturbance on anomalously low friction rock bursts

LI Liping<sup>1</sup>, LI Weijun<sup>1</sup>, PAN Yishan<sup>1, 2</sup>

(1. School of Mechanics and Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China;

2. School of Physics, Liaoning University, Shenyang, Liaoning 110036, China)

**Abstract:** Under high in-situ stresses and strong excavation disturbance, anomalously low friction effect is prone to occur in deep coal and rock mass, and then results in the anomalously low friction rock burst. A theoretical model was established for anomalously low friction effect of block rock with overburden pressures, and formulas for calculating the normal force between blocks and the horizontal displacement of working blocks were derived based on force analysis of blocks. Theoretical analysis of dynamic responses resulted from vertical and horizontal disturbances was conducted. The distribution of the minimum normal force between blocks, and the influence of the horizontal impact loading frequency and the delay time on the horizontal displacement of the working blocks were investigated. The results show that the position, where the anomalously low friction effect is prone to occur, locates at the three interfaces closest to the vertical impact source. The reduction of the normal force will lead to the reduction of the friction between blocks, and the anomalously low friction type of rock burst is easily caused by horizontal disturbances. When the horizontal impact amplitude is determined, the horizontal motion of the working block exists a specific delay time and a range of horizontal impact frequency. The horizontal displacement exhibits a periodic variation with the delay time and the horizontal impact amplitude. The starting time of the

**收稿日期:** 2018 - 08 - 02; **修回日期:** 2018 - 09 - 24

**基金项目:** 国家重点研发计划(2016YFC0600901); 辽宁省自然科学基金项目(201602353); 国家自然科学基金面上项目(51474120)

Supported by the National Key R & D Program(Grant No. 2016YFC0600901), Liaoning Province Natural Science Foundation of China(Grant No. 201602353) and National Natural Science Foundation of China(Grant No. 51474120)

**作者简介:** 李丽萍(1983 -), 女, 博士, 2005年毕业于辽宁工程技术大学工程力学专业, 现任副教授、硕士生导师, 主要从事深部岩体力学特性方面的教学与研究工作。E-mail: llpah@126.com

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2018.0922

horizontal motion of the working block lags the horizontal impact time. The working block will experience variable acceleration and deceleration motions, and finally be in a stationary state. The variation of the normal force between blocks is the prerequisite for the anomalously low friction effect, and the horizontal disturbance is the main factor causing the horizontal displacement of the working blocks.

**Key words:** rock mechanics; anomalously low friction effect; impact loading; rock burst; block rock; normal force; horizontal displacement

## 1 引言

随着我国经济高速发展, 能源需求量逐年增加, 浅部资源逐渐减少、枯竭, 地下开采深度和强度越来越大。深部开采条件下地质环境愈趋复杂, 在高地应力和开采强扰动下, 煤岩体极易发生超低摩擦效应, 继而诱发超低摩擦型冲击地压。如辽宁红阳三矿冲击地压现场发现巨量煤岩体向巷道整体滑移达数米, 采用超低摩擦效应理论可以合理解释这一异常现象, 因此从超低摩擦效应角度研究此类冲击地压发生机制具有重要理论价值和实践应用意义。

超低摩擦效应是指在动载作用下, 当冲击作用的能量达到一定程度时, 在相互作用块体间产生摩擦“消失”的效应。最早由 M. V. Kurlenya 等<sup>[1-3]</sup>提出, 并开展了块系岩体受冲击作用时的实验室模拟试验, 验证了超低摩擦效应的存在。N. I. Aleksandrova 等<sup>[4-7]</sup>从摆型波角度, 建立了一维块系介质模型, 通过试验及理论方法, 研究了摆型波在块系介质中的传播特性。

国内钱七虎<sup>[8]</sup>首次指出超低摩擦效应是深部开采中的关键科学问题, 需要加强对其发生机制和规律的研究。王明洋等<sup>[9-10]</sup>对具有构造等级的岩体介质在变形过程中的储能性状进行了理论研究, 并分析了其对块系介质动力变形与稳定性的影响。王洪亮等<sup>[11-15]</sup>基于 M. V. Kurlenya 等<sup>[1]</sup>的超低摩擦试验, 建立了深部块系岩体动力模型, 通过试验和理论分析, 验证了超低摩擦效应, 初步揭示了超低摩擦现象的内在机制, 并研制出一套深部岩体动态特性多功能试验装置。何满潮等<sup>[16]</sup>系统总结了国内外超低摩擦效应的试验及理论研究成果, 给出了双向冲击作用下工作块体法向力公式和水平位移公式。李杰等<sup>[17-19]</sup>研制了新的块系岩体动态力学性能测试试验系统, 通过不同初应力条件下冲击扰动诱发岩块滑移的物理模拟试验, 得到了冲击扰动诱发岩块不可逆位移、动力滑移失稳的力学机制及充要条件。潘一山等<sup>[20-21]</sup>基于摆型波传播动力模型, 从相邻岩块间相对位移角度给出了超低摩擦发生判据, 同时给出了在冲击

载荷作用下局部区域多个岩块在侧向力作用下发生超低摩擦滑移条件。李利萍等<sup>[22-24]</sup>从塑性动力学角度解释了岩体超低摩擦效应, 提出超低摩擦型冲击地压这一新概念, 并用 FLAC<sup>3D</sup> 模拟得到块系岩体同时受垂直冲击载荷和水平静力时的动力响应。贾宝新等<sup>[25]</sup>等开展了冲击载荷下块系岩体摆型波传播特性的试验研究。王来贵等<sup>[26]</sup>将超低摩擦效应引入地震载荷下边坡结构面的研究, 得到地震载荷下结构面法向应力状态调整规律及滑体启滑机制。任晓龙<sup>[27]</sup>以具有孔状结构的层理状花岗岩块体为研究对象, 在室内进行了不同试验条件下摩擦力减弱效应试验, 研究了不同静荷载水平和不同扰动荷载幅值作用下超低摩擦现象。蓝一凡<sup>[28]</sup>建立了深部岩体的二维非连续块体模型, 发现在二维矩形隧洞围岩中存在超低摩擦现象。

综上所述, 国内外学者对超低摩擦效应研究主要集中于一维动力模型, 所考量指标主要为块体的波动特性(加速度)及工作块体水平位移, 但对决定块体间摩擦力大小的重要参数——块体间法向力的变化规律研究较少涉及, 且在推导双向冲击作用下超低摩擦效应理论公式<sup>[16]</sup>的过程中, 并未考虑块体实际受力状态, 导致水平位移公式存在明显不足。本文在何满潮等<sup>[16]</sup>基础上, 通过对逐个块体进行受力分析, 建立考虑上覆岩层压力的块系岩体动力模型, 采用通过块体加速度求解块体间法向力的新研究思路, 给出新的法向力解析表达式和工作块体水平位移公式。理论研究垂直冲击和水平扰动共同作用下, 块系岩体各块体间法向力最小值变化, 以及得到水平冲击载荷频率及延迟时间对工作块体水平位移的影响规律。并将所得结论与前人研究结果对比, 以期对超低摩擦型冲击地压预测和防治提供参考。

## 2 超低摩擦效应理论模型

### 2.1 模型建立及法向力公式

深部岩体由裂隙和节理等地质构造所分割, 超低摩擦效应机制与块体界面动力变形特性和块系稳

定性密切相关。研究深部块体介质的变形特性必须首先揭示块体界面法向和切向的动力特性。因此，参考前人研究，将块体视为刚体，建立了如图 1 所示的动力计算模型。其中，块体为尺寸相同的等质量块体。垂直冲击扰动力  $P_v(t)$  作用于块体 1 上表面形心，方向竖直向下，其函数形式如下：

$$P_v(t) = \begin{cases} P_v \sin(\omega_v t) & (0 \leq t < t_d) \\ 0 & (t \geq t_d) \end{cases} \quad (1)$$

式中： $P_v$  为垂直冲击载荷幅值(N)； $\omega_v = 2\pi f_v$ ，其中， $f_v$  为垂直冲击频率(Hz)； $t$  为动力计算时间(s)； $t_d$  为动力持续时间(s)。

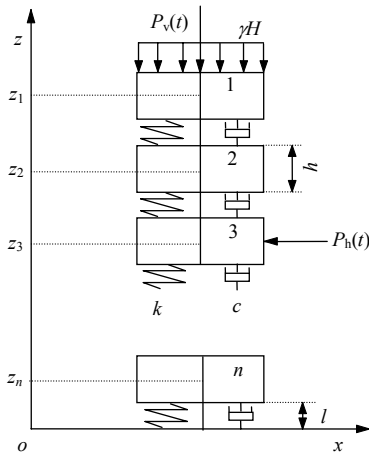


图 1 超低摩擦效应理论模型

Fig.1 Theoretical model of anomalously low friction effect

块体间设置弹簧和阻尼器用以描述块状岩体界面间软弱介质对能量的传递和阻滞，刚度系数为  $k$ ，阻尼系数为  $c$ 。块体运动包含 2 个阶段：第一阶段为垂直冲击作用下的受迫振动，第二阶段为块体以  $t_d$  时刻状态为初始条件的自由振动。

块体系统由  $n$  个块体垂直叠放构成，设竖直向上为正方向，距第  $n$  块体下底面中心  $l$  处为坐标原点，则竖直方向运动方程如下：

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z}_1 - k(z_1 - z_2 - h - l) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) &= -mg - P_v \sin(\omega_v t) - F_v \\ m\ddot{z}_2 - k(z_2 - z_3 - h - l) - c(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + k(z_1 - z_2 - h - l) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) &= -mg \\ &\vdots \\ m\ddot{z}_i - k(z_i - z_{i+1} - h - l) - c(\dot{z}_i - \dot{z}_{i+1}) + k(z_{i-1} - z_i - h - l) + c(\dot{z}_{i-1} - \dot{z}_i) &= -mg \\ &\vdots \\ m\ddot{z}_n - k\left(z_n - \frac{h}{2} - l\right) - c\dot{z}_n + k(z_{n-1} - z_n - h - l) + c(\dot{z}_{n-1} - \dot{z}_n) &= -mg \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： $m$  为块体质量(kg)； $z_i$  为块体  $i$  的纵坐标(m)； $l$  为弹簧自由长度(m)； $h$  为块体厚度(m)； $g$  为重力加速度(m/s<sup>2</sup>)； $F_v$  为垂直方向地应力合力(N)， $F_v = \gamma HA$ ； $A$  为块体 1 上表面积(m<sup>2</sup>)。

将式(2)简化成矩阵形式，得

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = F(t) + b \quad (3)$$

其中，

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -k & k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k & -2k & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & -2k & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & -2k \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -c & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & -2c & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & -2c & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & -2c \end{bmatrix}$$

$$F(t) = -P_v \begin{bmatrix} \sin(\omega_v t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$b = - \begin{bmatrix} mg + k(l+h) + F_v \\ mg \\ \vdots \\ mg - kh/2 \end{bmatrix}$$

设第 3 块体为工作块体，受水平力  $P_h(t)$  作用，其水平方向的运动方程为

$$m\ddot{u} = P_h(t) - \mu_s N(t) \quad (4)$$

式中： $u$  为块体水平运动位移(m)， $\mu_s$  为块体间动摩擦因数， $N(t)$  为块体所受法向力。

设  $z = z^0 + y$ ，竖向平衡位置有

$$Kz^0 = b \quad (5)$$

解得各块体初始位移为

$$z_i^0 = (n-i+1) \left( l+h + \frac{i+n}{2k} mg + \frac{F_v}{k} \right) - \frac{h}{2}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \tag{6}$$

将  $z = z^0 + y$ ,  $Kz^0 = b$  代入矩阵方程式(3), 得

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F(t) \tag{7}$$

模型中块体加速度近似解<sup>[7, 15-16]</sup>为

$$\ddot{z}_i = \ddot{y}_i = -\frac{2P_v l^2}{m\omega_v(\gamma t)^{2/3}} \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin(\zeta z + z^3/3) e^{-\mu z^2} z dz$$

$$\tag{8}$$

其中,

$$\gamma = \frac{c_1 l^2}{8} \left( 1 + \frac{3c^2}{mk} \right), \quad \zeta = \frac{il - c_1 t}{(\gamma t)^{1/3}}, \quad \mu = \frac{\alpha t}{(\gamma t)^{2/3}}$$

$$\alpha = \frac{cl^2}{m}, \quad c_1 = l \sqrt{\frac{k}{m}}$$

式中:  $k$  为弹簧刚度系数(N/m),  $c$  为阻尼系数(N·s/m)。

由式(8)可求得各块体竖向加速度, 代入式(2)可得:

块体 1 底部(接触面 1)所受法向力为

$$N_1(t) = k(z_1 - z_2 - l) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = m\ddot{z}_1 + mg + P_v \sin(\omega_v t) + F_v \tag{9}$$

块体 2 底部(接触面 2)接触面所受法向力为

$$N_2(t) = k(z_2 - z_3 - l) + c(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) = m\ddot{z}_2 + m\ddot{z}_1 + 2mg + P_v \sin(\omega_v t) + F_v \tag{10}$$

块体 3 底部(接触面 3)所受法向力为

$$N_3(t) = k(z_3 - z_4 - l) + c(\dot{z}_3 - \dot{z}_4) = \sum_{i=1}^3 m\ddot{z}_i + 3mg + P_v \sin(\omega_v t) + F_v \tag{11}$$

块体 4 底部(接触面 4)所受法向力为

$$N_4(t) = k(z_4 - z_5 - l) + c(\dot{z}_4 - \dot{z}_5) = \sum_{i=1}^4 m\ddot{z}_i + 4mg + P_v \sin(\omega_v t) + F_v \tag{12}$$

考虑实际受力状态, 块体 3(工作块体)所受法向力  $N(t)$  为块体 3 所受上、下接触面法向力的合力:

$$N(t) = \begin{cases} N_3(t) + N_2(t) & (N_3(t) \geq 0, N_2(t) \geq 0) \\ N_3(t) & (N_3(t) \geq 0, N_2(t) < 0) \\ N_2(t) & (N_2(t) \geq 0, N_3(t) < 0) \\ 0 & (N_2(t) < 0, N_3(t) < 0) \end{cases} \tag{13}$$

### 2.2 工作块体水平位移

工作块体在水平方向主要受 2 种形式的作用力: 一种为水平静力  $F$ ; 另一种为水平冲击  $P_h(t) =$

$P_h \sin[p\omega_h(t - \Delta t)]$ , 其中,  $\Delta t$  为延迟时间(垂直冲击和水平冲击作用于模型的时间间隔)。考虑受力作用形式不同, 其力学响应也不相同, 取块体间摩擦因数为  $\mu_s$ , 则块体 3 所受水平力表达式为(以受水平冲击为例):

$$H(t) = P_h(t) - \mu_s N(t) \tag{14}$$

考虑实际受力情况, 假设工作块体在未受垂直冲击的静力平衡状态下受侧向冲击作用时, 工作块体不发生水平移动, 此时:

$$P_h < \mu_s(5mg + 2F_v) \tag{15}$$

则对工作块体水平运动的描述可转化为方程式  $H(t) = 0$  的求根问题。

当方程式  $H(t) = 0$  无解 ( $H(t) < 0$ ) 或有唯一解 ( $P_h(t)_{\max} = \mu_s N(t)_{\min}$ ) 时, 工作块体不会发生水平移动。

当方程  $H(t) = 0$  有 2 个解  $t_0, t_1$  时, 工作块体将发生水平移动。若工作块体在水平方向运动, 其中每次同向运动都包含块体加速和减速运动 2 个阶段, 图 2 为块体运动示意图<sup>[16]</sup>。

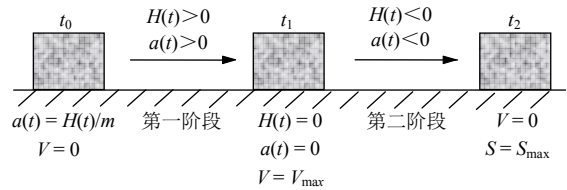


图 2 工作块体水平运动过程示意图<sup>[16]</sup>

Fig.2 Diagram of horizontal motion process of block<sup>[16]</sup>

从图 2 可以看出, 工作块体从  $t_0$  时刻开始做变加速运动,  $t_1$  时刻速度达到最大值。然后开始做变减速运动,  $t_2$  时刻速度减小为 0, 运动结束。具体边界条件详见图 2。2 个运动阶段的总水平位移计算公式如下:

第一段水平位移  $S_1$  为

$$S_1 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t \frac{H(t)}{m} dt dt \tag{16}$$

第一阶段结束时块体速率  $V_{\max}$  的计算表达式为

$$V_{\max} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{H(t)}{m} dt \tag{17}$$

由第二阶段速率边界条件可得

$$0 = V_{\max} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(t)}{m} dt \tag{18}$$

将式(17)代入式(18)中, 求解可得第二阶段块体运动结束时间  $t_2$ 。

因此第二阶段水平位移  $S_2$  为

$$S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t a(t) dt dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t \frac{H(t)}{m} dt dt \quad (19)$$

块体在垂直冲击和水平扰动共同作用下的总水平位移为

$$S = S_1 + S_2 \quad (20)$$

当方程  $H(t) = 0$  有 3 个及以上解时，工作块体的水平位移可按类似方法进行求解。

当工作块体受水平静力时，工作块体的水平位移仍可按上述方法进行求解，但需将式(14)中  $P_h(t)$  用  $F$  替换。

### 2.3 新法向力公式验证

为便于对比分析，取何满潮等<sup>[16]</sup>中参数： $P_v = 2\,789\text{ N}$ ， $\omega_v = 22\,619\text{ (}f = 3\,600\text{ Hz)}$ ， $l = 0.005\text{ m}$ ， $k = 4 \times 10^8\text{ N/m}$ ， $c = 4 \times 10^3\text{ N} \cdot \text{s/m}$ ， $m = 8.4\text{ kg}$ ， $F_v = 0\text{ N}$ 。图 3 分别给出了何满潮等<sup>[16]</sup>及本文工作块体的法向力随时间变化曲线。

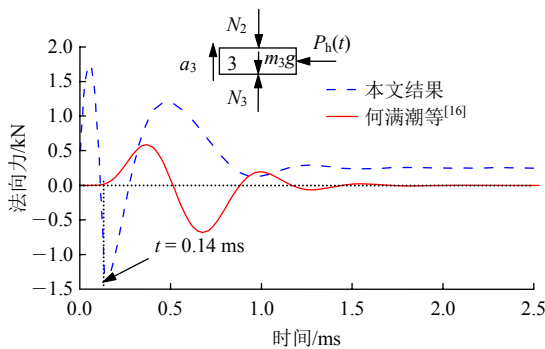


图 3 第 3 块体(工作块体)法向力随时间变化曲线  
Fig.3 The normal force curve of the block 3 with time

由图 3 可知，何满潮等<sup>[16]</sup>与本文所得法向力大小均随垂直冲击扰动而变化。何满潮等<sup>[16]</sup>的结果中，工作块体法向力初始值为 0，最终亦逐渐趋于 0，表明工作块体初始状态及最终平衡状态时，其与上、下接触面之间不存在法向力，此时若遇任意大小侧向扰动都将使块体产生较大水平位移，这显然与工作块体实际受力状态不符。本文结果中，第 3 块体下接触面所受法向力初值及最终大小均为  $3mg$ ，这一结果与块体所处实际受力状态一致。由于块体间用弹簧和阻尼器模拟岩体界面间软弱连接介质对能量的传递和阻滞，且模型上覆岩层压力为 0 N，所以块体间会出现拉伸状态，此时法向力为负值。工作块体的振动分为强迫振动和自由振动 2 个阶段，其时间节点为 0.14 ms。由以上分析可见，从块体在冲击作用下所处实际受力状态角度验证了本文推导得到的新法向力公式正确性和可靠性。

## 3 结果分析

### 3.1 各块体间法向力变化规律

块体间法向力受接触面刚度  $k$  与阻尼  $c$ 、块体质量  $m$ 、垂直冲击载荷幅值  $P_v$  及频率  $f_v$  影响，其变化情况异常复杂。为便于与前人结论进行对比分析，同样以何满潮等<sup>[16]</sup>参数为基础，取  $F_v = 1\,600\text{ N}$ ， $n = 6$ ，得到块体模型各块体间法向力变化曲线，如图 4 所示。

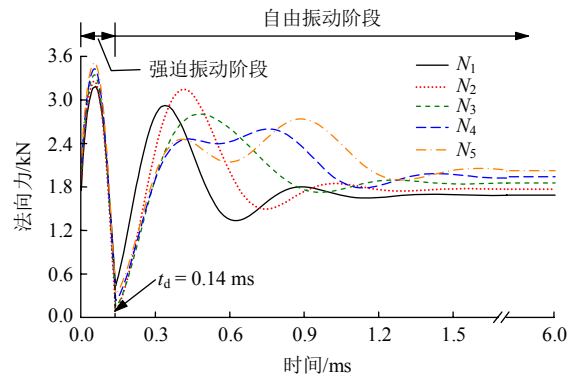


图 4 不同块体间法向力变化曲线

Fig.4 Normal force curve between different contact surfaces

由图 4 可知，块体模型受到垂直冲击载荷作用后，各块体间法向力在冲击载荷作用下发生振荡，变化形式类似于准周期正弦曲线，但幅值逐渐减小，最终达到平衡。工作块体运动分为 2 个过程，在  $t_d = 0.14\text{ ms}$  之前，工作块体做强迫振动，在  $t_d$  时刻之后，块体做有阻尼自由振动，最后逐渐平衡稳定。研究发现，当分别改变块体间接触面刚度与阻尼、垂直冲击载荷幅值及频率时，在静平衡状态下块体间法向力为定值，所以法向力最小值越小，块体间法向力降幅越大，超低摩擦效应越容易发生。改变块体质量时，虽静平衡状态下法向力也变化，但仍存在法向力最小值越小，块体间法向力降幅越大的规律。据此提出以法向力最小值变化规律判断超低摩擦效应发生的新依据。

法向力最小值的大小同样与各影响因素( $k$ ， $c$ ， $m$ ， $P_v$ ， $f_v$ )的取值密切相关，限于篇幅，以每个接触面法向力最小值随垂直冲击载荷幅值  $P_v$  变化情况为例进行说明，各个接触面法向力最小值及变化曲线如表 1 和图 5 所示。

由表 1 及图 5 可知，各块体间法向力最小值均随垂直冲击载荷幅值增加而线性递减，在表 1 中分别列出了线性拟合后的斜率和截距。冲击幅值越大，块体间法向力最小值越小，越易发生由超低摩擦效应导致的超低摩擦型冲击地压。

表 1 各接触面法向力最小值随冲击载荷幅值变化情况  
 Table 1 The minimum normal forces at each contact surface vary with the amplitude of impact load

冲击幅值 $P_v/N$	法向力最小值/N				
	接触面 1	接触面 2	接触面 3	接触面 4	接触面 5
200	1 596.96	1 650.1	1 732.55	1 816.15	1 900.99
500	1 466.03	1 472.54	1 552.29	1 635.84	1 720.68
1 500	1 029.61	880.65	951.44	1 034.81	1 119.64
2 789	429.45	88.44	147.64	230.78	315.61
4 500	-281.72	-897.81	-853.96	-771.14	-686.30
5 500	-712.32	-1 480.22	-1 445.62	-1 362.95	-1 278.12
9 500	-2 455.27	-3 842.90	-3 844.41	-3 762.45	-3 677.62
斜率	-0.435 3	-0.590 3	-0.599 4	-0.599 6	-0.599 6
截距	1 676.2	1 761.1	1 845.4	1 929.1	2 013.9

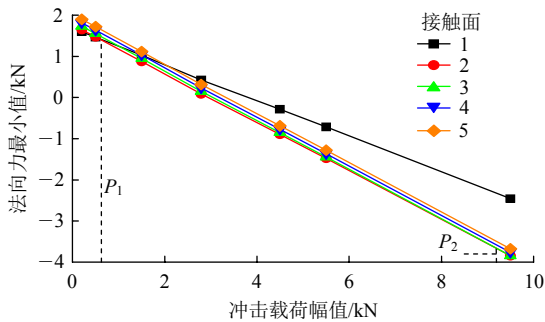
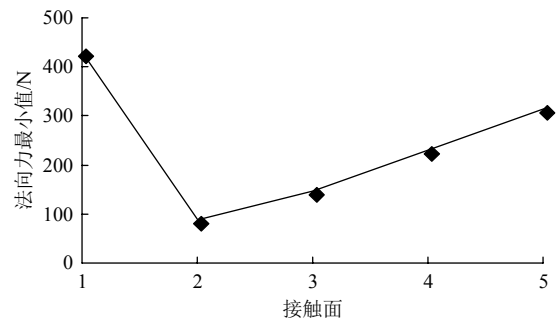


图 5 各接触面法向力最小值随冲击载荷幅值变化曲线  
 Fig.5 The minimum normal forces at each contact surface vary with the amplitude of impact loading

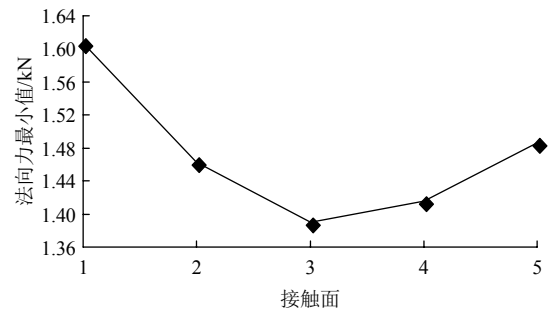
当确定超低摩擦效应易发程度随参数取值大小关系后，还需要确定在影响因素大小给定时，块体模型各个接触面中，哪个接触面的法向力值最小，即哪个接触面最易发生超低摩擦效应。图 5 中不同块体间法向力最小值随垂直冲击载荷幅值变化斜率不同，即在垂直冲击载荷幅值变化时，法向力最小值在块体间分布情况也不同。研究发现，垂直冲击载荷幅值存在临界值  $P_1$ ， $P_2$ ，当  $P_v < P_1$  时，块体间的法向力最小值发生在块体 1, 2 间(接触面 1)，此时不同块体间法向力最小值分布情况如图 6(c)所示。当  $P_1 < P_v < P_2$  时，块体法向力最小值发生在块体 2, 3 间(接触面)，此时不同块体间法向力最小值分布情况如图 6(a)所示。当  $P_2 < P_v$  时，块体法向力最小值发生在块体 3, 4 间(接触面 3)，此时不同块体间法向力最小值分布情况如图 6(b)所示。

由上述分析可知，影响因素在改变每个接触面法向力最小值大小的同时，也改变模型各块体间法向力分布规律。为获得各块体间法向力最小值分布

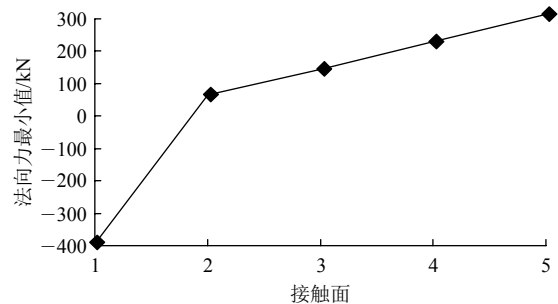
规律，从而确定超低摩擦效应易发接触面位置，采用控制变量法，依次改变接触面刚度  $k$  与阻尼  $c$ 、块体质量  $m$ 、垂直冲击载荷幅值  $P_v$  与频率  $f_v$ ，分析各块体间法向力最小值分布规律随影响因素变化情况。研究发现，不同块体间法向力最小值分布规律主要为图 6(a)~(c)所示的 3 种结果。即随上述影响因素逐一变化，不同块体间法向力最小值分别发生在接触面 1、接触面 2、接触面 3 之间，仅法向力最小值大小存在差异。并且发现当接触面刚度  $k$  越小、阻尼  $c$  越大、块体质量  $m$  越大、垂直冲击载荷幅值  $P_v$  越小及频率  $f_v$  越大，各块体间法向力分布将趋于与图 6(d)所示的变化规律一致。这是因为块体振动减弱，各块体间法向力最小值将接近于块体静止时其接触面所受的法向力；若不考虑块体间弹簧及阻尼等因素，当块体受冲击作用时，块体 3, 4 间法向力最大值为  $3mg + F_v + P_v$ ，法向力最小值为  $3mg + F_v$ 。



(a) 基础参数



(b)  $c = 48\ 000\ N \cdot s/m$



(c)  $k = 2 \times 10^9\ N/m$



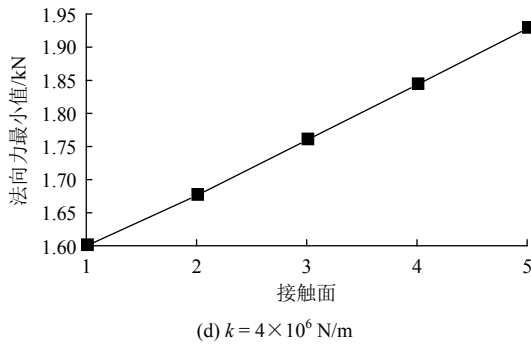


图 6 块体间法向力最小值与接触面关系

Fig.6 The relationship between the minimum normal force between blocks and the contact surface

法向力不同分布规律可能导致不同的动力灾害，图 6(a)为取基础参数时各块体间法向力最小值变化情况。由图 6(a)可知，在取基础参数时，模型各块体间法向力最小值发生在 2 接触面，即第 2 和 3 块体间接触面，表明第 2, 3 块体间的相互作用力最小。若第 3 块体为工作面前方煤体，第 2 块体为顶板，在放炮、机械振动等强冲击扰动下，顶板可能因失去下侧煤体约束而发生断裂失稳破坏，此时发生顶板断裂而导致冲击地压的风险增加，发生顶板断裂型冲击地压。考虑第 2, 3 块体间法向力值最小，表明第 2, 3 块体间的摩擦力最小，若第 2 块体为断层，此时容易因断层错动而导致冲击地压发生，从而诱发断层错动型冲击地压。若第 2 块体为顶板，第 3 块体为煤体，当在块体上、下接触面法向力同时达到最小值时，遇较大水平静力或水平冲击扰动，第 3 块体将容易发生整体滑移，从而诱发超低摩擦型冲击地压。

上述 3 种冲击地压的发生均与超低摩擦效应密切相关，对于前 2 种冲击地压类型，前人研究较多，不再赘述。本文主要着重研究煤岩体发生整体滑移的超低摩擦型冲击地压。

### 3.2 工作块体水平位移分析

工作块体侧向滑移跟水平冲击密切相关，以本文推导公式为依据，在给定垂直冲击条件下，保持水平冲击幅值恒定，参考何满潮等<sup>[16]</sup>，摩擦因数取为  $\mu_s = 0.576$ ，研究延迟时间  $\Delta t$ (即垂直冲击和水平冲击的时间差)和水平冲击频率  $f_h$  对工作块体水平位移影响规律，得到了工作块体侧向滑移的力学条件。

(1) 延迟时间对工作块体水平位移影响具有周期性变化规律。

图 7 所示为工作块体水平方向所受摩擦力及水平冲击变化曲线。水平摩擦力曲线按基础参数取值

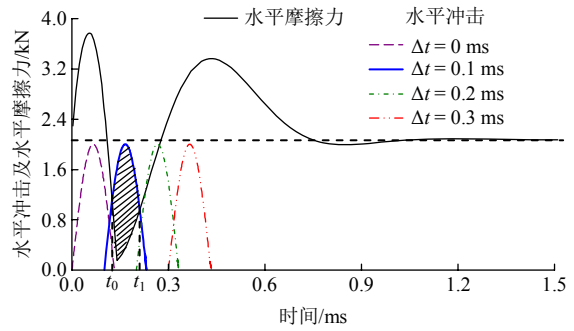


图 7 延迟时间对超低摩擦效应影响规律

Fig.7 Influence of delay time on anomalous low friction effect

确定。为使工作块体在静平衡状态不发生水平移动，取水平冲击幅值<sup>[16]</sup>为 2 000 N，水平冲击频率为 3 800 Hz，延迟时间  $\Delta t$  分别取为 0, 0.1, 0.2, 0.3 ms。

由图 7 可知，当工作块体在静力平衡状态时，只要水平静力或水平冲击幅值小于工作块体水平静摩擦力，工作块体就不会产生水平位移；当块体模型受垂直冲击扰动后，工作块体水平方向摩擦力产生拟正弦曲线波动，最终达到静摩擦力值时处于稳定状态。垂直冲击作用使工作块体产生水平位移的水平摩擦力临界值由原来的 2 056 N 减小到 134 N，即工作块体受垂直冲击后，在相同水平静力大小条件时更易发生水平移动，表明更易发生超低摩擦效应，从而诱发超低摩擦型冲击地压。

由图 7 可知，当  $\Delta t = 0, 0.3$  ms 时， $H(t) = P_h(t) - \mu_s N(t) < 0$ ，外力不足以克服工作块体水平方向的摩擦阻力，使工作块体产生水平运动，工作块体不会产生水平位移。当  $\Delta t = 0.1$  ms 时，工作块体所受水平冲击曲线与其水平摩擦力曲线分别相交于  $t_0, t_1$  时刻，此条件下存在  $H(t) > 0 (t_0 < t < t_1)$  阶段，此阶段  $a(t) > 0$ 。工作块体从  $t_0$  时刻开始做变加速水平运动， $t_1$  时刻速度达到最大值，然后做变减速运动直到结束，工作块体产生水平位移。由式(16)可求得此阶段块体最大速度，由于工作块体质量  $m$  为定值，式(16)可转化为如下形式：

$$V_{\max} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} H(t) dt}{m} \quad (21)$$

式中： $\int_{t_0}^{t_1} H(t) dt$  为水平冲击曲线与工作块体水平摩擦力曲线所围面积。所围面积越大，块体速度越大，最终水平位移越大。在延迟时间逐渐增加的过程中，水平冲击曲线与工作块体水平摩擦力曲线所围面积呈现出由 0 逐步增加到极大值，然后又减小到 0 的

过程，即延迟时间不同时，工作块体水平位移具有周期性变化规律，这与何满潮等<sup>[16]</sup>所得试验结论一致。上述分析首次从理论上解释了工作块体水平位移随延迟时间呈周期性变化规律的原因。

(2) 水平冲击频率对工作块体水平位移影响也具有周期性变化规律。

图 8 所示为工作块体水平方向摩擦力及水平冲击变化曲线。其水平冲击幅值为 2 000 N，延迟时间  $\Delta t = 0$  ms，水平冲击频率分别为 3 800，1 200，450，225，75 Hz。

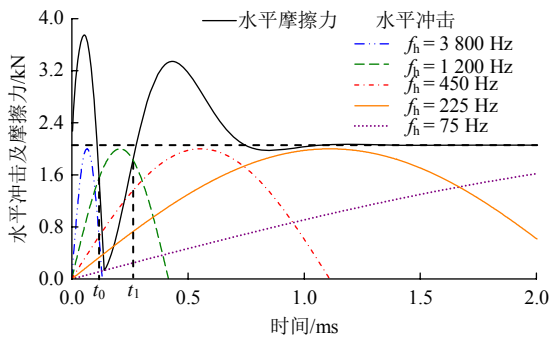


图 8 水平冲击频率对超低摩擦效应影响规律

Fig.8 Influence of horizontal impact frequency on anomalously low friction effect

由图 8 可知，当  $f_h = 3\ 800, 75$  Hz 时，水平冲击曲线与工作块体水平摩擦力曲线没有交集，表明此时工作块体不会发生水平移动。当  $f_h = 1\ 200, 450, 225$  Hz 时，水平冲击曲线与工作块体水平摩擦力曲线所围面积依次减小，表明此条件下工作块体水平位移依次减小。分析表明： $f_h$  从 3 800 Hz 减小到 75 Hz 时，水平冲击曲线与工作块体水平摩擦力曲线所围面积先增大后减小，存在临界频率 1 200 Hz 使其所围面积达到最大值，此时工作块体水平移动幅值最大，且临界水平冲击频率远小于垂直冲击载荷频率，其值为垂直冲击频率 3 600 Hz 的 1/3。

### 3.3 超低摩擦型冲击地压实例分析

随深部开采，煤矿冲击地压呈现新特征。这里以 2017 年 11 月 11 日辽宁红阳三矿冲击地压为实例说明超低摩擦型冲击地压特点。冲击地压发生后，现场观察到 214 m×31.7 m×3 m 的巨量煤岩体整体向巷道方向滑移达 1~3 m，而顶板基本保持完整，这种破坏现象极有可能是由高地应力和强扰动下煤体沿与顶板间结构面发生超低摩擦效应诱发的，因此属于超低摩擦型冲击地压。红阳三矿事故造成巷道破坏情况如图 9 所示。



(a) 煤壁整体移动巷道合拢 (b) 支护弯曲

图 9 事故造成巷道破坏情况

Fig.9 Roadway damage caused by accident

红阳三矿事故区域煤层顶板为泥岩，附近断层侵入将煤层切割成煤柱成为分离体，遇顶板断裂造成的垂直向和水平向动载反复强扰动，导致煤层与顶板、底板间的摩擦作用减弱、甚至极弱。当达到临界条件时，发生超低摩擦效应，煤柱向自由空间瞬间发生大位移整体滑动，使得巷道完全堵塞，发生超低摩擦型冲击地压。红阳三矿事故灾害示意图如图 10 所示。由顶板、煤柱、底板等组成的事故区域发生的超低摩擦型冲击地压，可简化为本文块系岩体模型中工作块体在垂直和水平冲击下的水平移动问题。

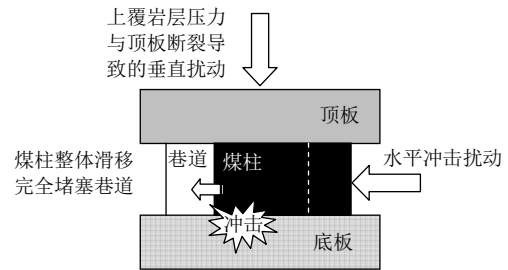


图 10 红阳三矿超低摩擦型冲击地压示意图

Fig.10 Anomalously low friction rock burst in Hongyang No.3 coal mine

## 4 讨论

(1) 超低摩擦效应的发现为揭示深部动力灾害现象的发生提供了新的思路。本文考虑深部被节理和裂隙所分割的块系岩体受力情况及深部岩体分层性，将其简化为考虑上覆岩层压力的一维块体动力模型，推导出了新的块体法向力公式和工作块体水平位移公式。由块体间法向力最小值分布情况确定了超低摩擦效应易发的接触面，给出了接触面刚度与阻尼、块体质量、垂直冲击载荷幅值及频率对法向力最小值分布的影响规律，以及延迟时间和水平冲击频率对工作块体水平位移影响规律。本文所得理论分析结论与何满潮等<sup>[16]</sup>的试验结果一致。



(2) 本文法向力解析式计算过程基于理想化模型, 即未考虑岩体所受围压, 假设各块体间刚度系数  $k$ 、阻尼系数  $c$  均相同, 模型中块体为等质量、等体积块体。研究发现, 通过各块体加速度求得块体间法向力的过程不受围压、刚度系数、阻尼系数、块体质量等参数的影响, 因此该研究方法为开展组合岩块冲击扰动试验提供了新思路, 同时也为现场观测超低摩擦效应提供了可能。

(3) 岩块间的超低摩擦效应可视为冲击扰动作用下法向力降低和岩块间摩擦因数降低的耦合效应。本文在水平位移分析过程中, 将块体间摩擦因数设定为常数, 主要基于以下两方面考虑: 块体间的摩擦因数主要由接触面的粗糙度决定, 而冲击扰动作用在极短时间内对接触面粗糙度的影响有限; 关于摩擦因数, 因块体起滑之前的最大静摩擦因数及动力载荷对工作块体最大静摩擦因数的影响异常复杂, 推导和分析难度较大, 为简化起见, 故暂时将摩擦因数设定为常数, 这方面也是今后研究的重点。

(4) 目前关于超低摩擦效应发生判据主要存在 2 种方法。一种是通过工作块体的水平位移进行判定, 另一种是通过块体间相对位移大小进行判定, 2 种方法各有优势。但笔者认为对超低摩擦效应发生判定最终均应归结为对块体间摩擦力大小的讨论和判定。当块体模型给定时, 块体间的最大静摩擦因数也随之确定, 块体间法向力是影响摩擦力大小的主要因素。由本文分析可知, 水平位移不仅与块体间摩擦力密切相关, 而且也与水平扰动频率与延迟时间有关, 这将直接影响超低摩擦效应发生判定。因此本文提出对超低摩擦效应发生判定不能仅仅依赖对块体水平位移和相对位移的判定, 也应同时考虑直接影响块体间摩擦力大小的块体间法向力变化特征, 以及水平扰动频率与延迟时间的影响。

## 5 结 论

以前人试验研究和理论分析为基础, 建立了考虑上覆岩层压力的块系岩体动力模型, 逐一对块体进行受力分析, 推导出块体间新的法向力公式和工作块体水平位移公式, 研究了块系岩体受垂直冲击和水平扰动时的超低摩擦效应发生规律。具体结论如下:

(1) 垂直冲击作用是超低摩擦效应发生的前提条件, 而水平扰动是导致超低摩擦型冲击地压发生

的直接原因。

(2) 通过各块体间法向力最小值分布特征分析, 确定了最容易发生超低摩擦效应的接触面位置为离垂直冲击源最近的 3 个接触面。工作块体在垂直冲击扰动后, 块体间法向力减小, 摩擦力降低, 遇水平扰动易发生水平移动, 产生超低摩擦效应, 最终导致超低摩擦型冲击地压发生。

(3) 工作块体的水平运动滞后于水平冲击作用时间, 从理论上解释了延迟时间不同, 水平位移周期性变化的原因, 同时发现工作块体水平位移随水平冲击频率也具有周期性变化规律。

## 参考文献(References):

- [1] KURLENYA M V, OPARIN V N, VOSTRIKOV V I. Pendulum-type waves: Part II. Experimental methods and main results of physical modeling [J]. *Journal of Mining Science*, 1996, 32(4): 245 - 273.
- [2] KURLENYA M V, OPARIN V N, VOSTRIKOV V I. Effect of anomalously low friction in block media[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, 40(6): 1 116 - 1 120.
- [3] KURLENYA M V, OPARIN V N, BALMASHNOV A E G. On dynamic behavior of "self-stressed" block media, Part II: Comparison of theoretical and experimental data[J]. *Journal of Mining Science*, 2001, 37(5): 455 - 461.
- [4] ALEKSANDROVA N I, SHER E N. Modeling of wave propagation in block media [J]. *Journal of Mining Science*, 2004, 40(6): 579 - 587.
- [5] ALEKSANDROVA N I, CHERRNIKOV A G, SHER E N. Experimental investigation into the one-dimensional calculated model of wave propagation in block medium[J]. *Journal of Mining Science*, 2005, 41(3): 232 - 239.
- [6] SHER E N, ALEKSANDROVA N I, AYZENBERG-STEPANENKO M V, et al. Influence of block-hierarchical structure of rocks on the peculiarities of seismic wave propagation[J]. *Journal of Mining Science*, 2007, 43(6): 585 - 591.
- [7] ALEKSANDROVA N I, SHER E N, CHERRNIKOV A G. Effect of viscosity of partings in block-hierarchical media on propagation of low-frequency pendulum waves[J]. *Journal of Mining Science*, 2008, 44(3): 225 - 234.
- [8] 钱七虎. 深部地下工空间开发中的关键科学问题[C]// 第230次香山科学会议——深部地下空间开发中的基础研究关键技术问题. 北京: [s. n.], 2004.(QIAN Qihu. The key problems of deep underground space development[C]// The Key Technical Problems of Base Research in Deep Underground Space Development—the 230th Xiangshan Science Conference. Beijing: [s. n.], 2004.(in Chinese))
- [9] 王明洋, 戚承志, 钱七虎. 深部岩体块系介质变形与运动特性研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(16): 2 825 - 2 830.(WANG Mingyang, QI Chengzhi, QIAN Qihu. Study on deformation and motion characteristics of blocks in deep rock mass[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(16): 2 825 - 2 830.(in Chinese))

- [10] WANG M Y, LI J, MA L J, et al. Study on the characteristic energy factor of the deep rock mass under weak disturbance[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2016, 49(8): 3 165 - 3 173.
- [11] 王洪亮, 葛涛, 王德荣, 等. 块系岩体动力特性理论与实验对比分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2007, 26(5): 951 - 958.(WANG Hongliang, GE Tao, WANG Derong, et al. Comparison of theoretical and experimental analyses of dynamic characteristics of block rock mass[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(5): 951 - 958.(in Chinese))
- [12] 许琼萍, 陆渝生, 王德荣. 深部岩体块系摩擦减弱效应试验研究[J]. *解放军理工大学学报*, 2008, 9(2): 64 - 76.(XU Qiongping, LU Yusheng, WANG Derong. Experimental study on friction weakened effect of deep block rock mass[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 9(2): 64 - 76.(in Chinese))
- [13] 王德荣, 陆渝生, 冯淑芳, 等. 深部岩体动态特性多功能试验系统的研制[J]. *岩石力学与工程学报*, 2008, 27(3): 601 - 606.(WANG Derong, LU Yusheng, FENG Shufang, et al. Development of multipurpose test system for dynamic behaviors of deep rock masses[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 27(3): 601 - 606.(in Chinese))
- [14] 吴昊, 方秦, 王洪亮. 深部块系岩体超低摩擦现象的机理分析[J]. *岩土工程学报*, 2008, 30(5): 769 - 775.(WU Hao, FANG Qin, WANG Hongliang. Mechanism of anomalously low friction phenomenon in deep block rock mass[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, 30(5): 769 - 775.(in Chinese))
- [15] 吴昊, 方秦, 张亚栋, 等. 一维块系地质块体波动特性的试验和理论研究[J]. *岩土工程学报*, 2010, 32(4): 600 - 611.(WU Hao, FANG Qin, ZHANG Yadong, et al. Propagation properties of stress waves in one-dimensional geo-block medium[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32(4): 600 - 611.(in Chinese))
- [16] 何满潮, 钱七虎. 深部岩体力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 547 - 570.(HE Manchao, QIAN Qihu. The basis of deep rock mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2010: 547 - 570.(in Chinese))
- [17] 李杰, 周益春, 蒋海明, 等. 非线性摆型波问题的提出及科研仪器研制[J]. *湘潭大学自然科学学报*, 2017, 39(4): 22 - 28.(LI Jie, ZHOU Yichun, JIANG Haiming, et al. State of the nonlinear pendulum-type waves problems and development of the test equipment[J]. *Natural Science Journal of Xiangtan University*, 2017, 39(4): 22 - 28.(in Chinese))
- [18] 李杰, 王明洋, 蒋海明, 等. 爆炸与冲击中的非线性岩石力学问题(I): 一维块系岩体波动特性的试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(1): 38 - 50.(LI Jie, WANG Mingyang, JIANG Haiming, et al. Nonlinear mechanical problems in rock explosion and shock. Part I: Experimental research on properties of one-dimensional wave propagation in block rock masses[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(1): 38 - 50.(in Chinese))
- [19] 李杰, 蒋海明, 王明洋, 等. 爆炸与冲击中的非线性岩石力学问题(II): 冲击扰动诱发岩块滑移的物理模拟试验[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37(2): 291 - 301.(LI Jie, JIANG Haiming, WANG Mingyang, et al. Nonlinear mechanical problems in rock explosion and shock. Part II: Physical model test on sliding of rock blocks triggered by external disturbance[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, 37(2): 291 - 301.(in Chinese))
- [20] 潘一山, 王凯兴. 岩体间超低摩擦发生机理的摆型波理论[J]. *地震地质*, 2014, 36(3): 833 - 844.(PAN Yishan, WANG Kaixing. Pendulum-type waves theory on the mechanism of anomalously low friction between rock masses[J]. *Seismology and Geology*, 2014, 36(3): 833 - 844.(in Chinese))
- [21] 王凯兴. 基于摆型波理论的非连续岩体动力响应与防冲控制研究[博士学位论文][D]. 阜新: 辽宁工程技术大学, 2013.(WANG Kaixing. Dynamic response of discontinuous rock mass base on the theory of pendulum-type waves and anti-impact control[Ph. D. Thesis][D]. Fuxin: Liaoning Technical University, 2013.(in Chinese))
- [22] 李丽萍, 潘一山, 王晓纯, 等. 开采深度和垂直冲击荷载对超低摩擦型冲击地压的影响分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, 33(增1): 3 225 - 3 230.(LI Liping, PAN Yishan, WANG Xiaochun, et al. Influence analysis of exploit depth and Vertical impact load on anomalously low friction rock burst[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(Supp.1): 3 225 - 3 230.(in Chinese))
- [23] 李丽萍, 潘一山, 王晓纯, 等. 考虑上覆岩层压力的深部岩体块系介质超低摩擦效应理论分析[J]. *自然灾害学报*, 2014, 23(1): 149 - 154.(LI Liping, PAN Yishan, WANG Xiaochun, et al. Theoretical analysis of ultra-low friction effect in deep block rock mass considering overlying rock pressure[J]. *Journal of Natural Disasters*, 2014, 23(1): 149 - 154.(in Chinese))
- [24] 李丽萍, 王淋, 邵英楼. 动静组合加载作用下块系岩体动力响应分析[J]. *中国安全生产科学技术*, 2016, 12(11): 5 - 10.(LI Liping, WANG Lin, TAI Yinglou. Dynamic response analysis on block rock mass under combined static-dynamic load[J]. *Journal of Safety Science and Technology*, 2016, 12(11): 5 - 10.(in Chinese))
- [25] 贾宝新, 陈扬, 潘一山, 等. 冲击荷载下块系岩体摆型波传播特性的试验研究[J]. *岩土力学*, 2015, 36(11): 3 071 - 3 076.(JIA Baoxin, CHEN Yang, PAN Yishan, et al. Experimental research on propagation characteristics of block-rock mass pendulum-type wave under shock load[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(11): 3 071 - 3 076.(in Chinese))
- [26] 王来贵, 刁彦会, 周向, 等. 地震边坡超低摩擦效应启滑机理分析[J]. *防灾减灾工程学报*, 2016, 36(4): 595 - 600.(WANG Laigui, XI Yanhui, ZHOU Xiang, et al. Analysis of open-slip with anomalously low friction effect of slope under earthquake[J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2016, 36(4): 595 - 600.(in Chinese))
- [27] 任晓龙. 节理化岩体超低摩擦现象实验研究[博士学位论文][D]. 北京: 中国矿业大学, 2017.(REN Xiaolong. Experiment study of ultra-low friction phenomenon on jointed rock mass[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: China University of Mining and Technology, 2017.(in Chinese))
- [28] 蓝一凡. 深埋洞室超低摩擦型岩爆发生机制与定量预测[硕士学位论文][D]. 重庆: 重庆大学, 2015.(LAN Yifan. The occurrence mechanism of anomalously low friction-type rockburst and its quantitative prediction in deep caverns[M. S. Thesis][D]. Chongqing: Chongqing University, 2015.(in Chinese))