广东工业大学

2018年博士学位研究生招生考试试题

考试科目（代码）名称：(2002)线性代数　　　　满分 100 分

（考生注意：答卷封面需填写自己的准考证编号，答完后连同本试题一并交回！）

一(15分)、已知矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 A，使得 $AP=PB$ 成立，并求 A^5.

二(15分)、讨论：当常数 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases}ax_1+2x_2+3x_3=4\\ \quad\quad\ 2x_2+bx_3=2\\ 2ax_1+2x_2+3x_3=6\end{cases}$

（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多解？并当方程组有解时，求出它的解.

三(15分)、已知向量 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，其中 a,b 为常数，（1）求 a,b 的值；（2）判断矩阵 A 能否对角化，并给出详细的理由说明.

四(15分)、设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\5\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix}$，其中 a,b 为常数，已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2，即 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，

（1）求 a,b 的值；

（2）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组，并将不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示.

五(10分)、已知 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，A_{ij} 是 A 的对应于 a_{ij} 的代数余子式，且对任意的 $i,j=1,2,3$，都有 $a_{ij}=A_{ij}$，证明：（1）A 为可逆矩阵；（2）$|A|=1$.

六(10 分)、已知二次型 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求常数 a 的取值范围.

七(10 分)、已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，其中 r 为正整数，向量 β 不是 $Ax=0$ 的解，证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_r$ 线性无关.

八(10 分)、设 E 为 n 阶单位矩阵，α 为 n 维列向量，α^T 为 α 的转置，且 $\alpha^T\alpha=1$，令 $H=E-2\alpha\alpha^T$，证明：H 是对称的正交矩阵.