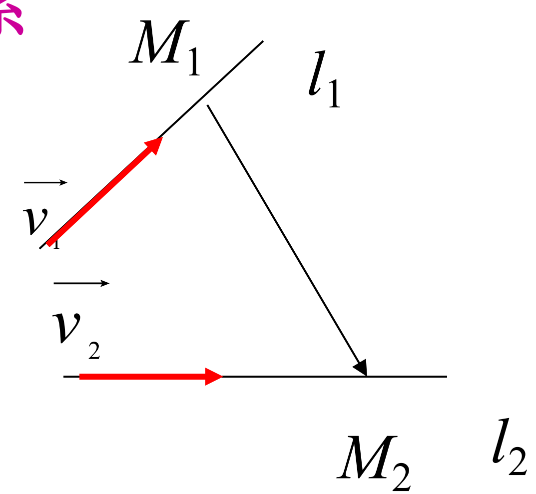
§7 空间两直线的相关位置

Contents

一、空间两直线的相关位置

定理3.7.1 判定空间两直线 $l_1:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}, l_2:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$

的相关位置的充要条件为： 两直线的位置关系



i 异面

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

ii 相交

$$\Delta=0, X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$$

iii 平行

$$X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2\neq\left(x_2-x_1\right):\left(y_2-y_1\right):\left(z_2-z_1\right)$$

iv 重合

$$X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2=\left(x_2-x_1\right):\left(y_2-y_1\right):\left(z_2-z_1\right)$$

例1 求通过点$P(1,1,1)$且与两直线 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线的方程.

注意: 要验证所求直线与两已知直线相交。

因为共面是相交的必要不充分条件.

二、空间两直线的夹角（直角坐标系）

定义3.7.1 平行于空间两直线的两向量间的角，叫做空间两直线的夹角。两直线 l_1, l_2 的夹角记做 $\angle(l_1, l_2)$.

定理3.7.2 在直角坐标系里，空间两直线 $l_1 : \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1}$, $l_2 : \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2}$ 夹角的余弦为：

$$\cos\angle(l_1, l_2) = \pm \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

推论 两直线 $l_1 : \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1}, l_2 : \frac{x - x_2}{X_2} = \frac{y - y_2}{Y_2} = \frac{z - z_2}{Z_2}$

垂直的充要条件是： $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$

三、两异面直线间的距离与公垂线方程（直角坐标系下）

定义3.7.2　空间两直线上的点之间的最短距离，叫做这两条直线之间的距离。

定义3.7.3　与两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两异面直线的公垂线，

两个交点之间的线段的长叫做公垂线的长。

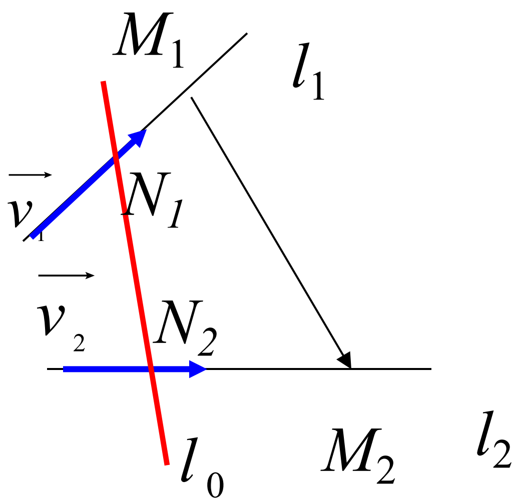
定理3.7.3　两异面直线间的距离等于它们公垂线的长。

1、两异面直线间的距离（直角坐标系）

定理3.7.4 两异面直线 $l_1:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}, l_2:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$

之间的距离公式是：

$$\boxed{d=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}}$$

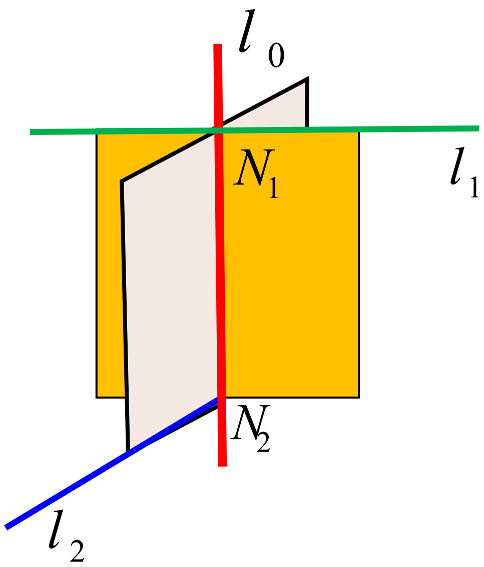


几何意义： 两条异面直线 l_1, l_2 之间的距离 d 恰好是以 $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 为棱的平行六面体的在以 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 为邻边的平行四边形底面上的高.

2、两异面直线的公垂线方程（直角坐标系下）

公垂线方程

$$
\begin{cases}
\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \\
\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0
\end{cases}
$$



例2 已知两直线$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}, l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$，试证明两直线$l_1$与$l_2$为异面直线，并求$l_1$与$l_2$间的距离与它们的公垂线方程.

练习 求通过点$P_0(-1,0,4)$与平面$\pi:3x-4y+z+1=0$平行，又与直线$k:\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线的方程。

（注意：验证直线 相交）.

作业：

P_{131}

3（2），4，7，9（2）

§8　平面束

Contents

一、平面束的定义

二、平面束的方程

一、平面束的定义

定义3.8.1 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做**有轴平面束**，那条直线叫做**平面束的轴**。

定义3.8.2 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做**平行平面束**。

二、平面束的方程

定理3.8.1 如果两个平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

交于一条直线 L，那么以直线 L 为轴的有轴平面束的方程是

$$l\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + m\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0$$

其中 l, m 是不全为零的任意实数。

定理3.8.2 如果两个平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

为平行平面，即 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$，那么方程

$$l\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+m\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$$

表示平行平面束，平面束里任何一个平面都和平面π_1或 π_2平行，其中l, m 是不全为零的任意实数，且 $-\frac{m}{l}\neq\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$。

推论 由平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$决定的平行平面束的方程是

$Ax+By+Cz+\lambda=0$，其中 λ 是任意实数。

例题

例1 求通过直线$l:\begin{cases}2x+y-2z+1=0\\ x+2y-z-2=0\end{cases}$，且与平面$\pi: x+y+z-1=0$垂直的平面方程。

例2 求与平面$x-2y+3z-4=0$平行且与原点距离等于1的平面方程.

例3 直线方程 $l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的系数应满足什么条件才能使该直线在坐标平面xOz内.

作业:

P_{137}: 3, 4, 6