

文章编号: 1000-4750(2018)03-0125-07

板桁梁抗扭惯性矩的计算方法

李永乐, 王 磊, 向活跃, 陈新中

(西南交通大学桥梁工程系, 四川, 成都 610031)

摘 要: 抗扭惯性矩是考察大跨度板桁梁受力性能的重要参数, 但板桁梁精细化的有限元建模分析较复杂, 结构模型试验成本较高, 简洁可靠的计算分析方法是更好的选择。首先, 针对桁架结构, 基于剪切刚度相等原则, 提出了考虑弦杆框架效应的桁架等效板厚度的解析表达式。其次, 考虑桥面板与 U 肋在水平方向剪切变形的一致性, 改进了正交异性板的等效板厚度的计算公式, 给出了板桁梁扭转惯性矩的解析公式。最后, 以实际板桁梁为例, 采用精细化的有限元模型验证了该文计算方法的正确性。结果表明, 提出的板桁梁抗扭惯性矩的计算方法具有较高的精度。

关键词: 板桁梁; 抗扭惯性矩; 正交异性板; 剪切刚度; 有限元模型

中图分类号: U443.35 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2016.11.0860

A COMPUTATIONAL METHOD OF TORSIONAL INERTIA FOR PLATE TRUSS GIRDERS

LI Yong-le, WANG Lei, XIANG Huo-yue, CHEN Xin-zhong

(Department of Bridge Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)

Abstract: The torsional inertia is an important parameter to measure the mechanical performance of long-span plate truss girders. As a detailed finite element model of plate truss girders is complex and the model test is costly, a succinct and reliable computational method is a better choice. First, the analytic formula of equivalent plate thickness of the main truss, taking into account the chord framing effects of the truss structure, was derived based on the shear stiffness equality principle. Secondly, the analytic formula of equivalent plate thickness of the orthogonal plate was improved based on the consistency of horizontal shear deformation between the bridge panel and the U-rib, and the calculation formula of torsional inertia of the plate truss girder was presented. Finally, the detailed finite element model of a practical plate truss girder was taken as an example to prove the validity of the computational method. The results show that the proposed method for calculating the torsional inertia of the plate truss girder has a high degree of accuracy.

Key words: plate truss girder; torsional inertia; orthogonal plate; shear stiffness; finite element model

随着桥梁建设的高速发展, 板桁梁已成为大跨度桥梁常用的断面形式, 如德国欧姆里希桥^[1]、加拿大狮门桥^[2]、平潭海峡公铁两用大桥^[3]和安庆铁路长江大桥^[4]等。板桁梁由正交异性板和桁架组合

成一整体, 相互协调, 共同受力, 具有自重轻、抗弯抗扭刚度大、抗风稳定性好、跨越能力强等优点。

抗扭惯性矩是评价板桁梁受力性能的重要参数之一。对于板桁梁抗扭性能的分析, 主要有结

收稿日期: 2016-11-07; 修改日期: 2017-04-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1334201, 51525804); 四川省青年科技创新团队项目(15CXTD0004)

通讯作者: 向活跃(1986—), 男, 重庆人, 副教授, 博士, 主要从事桥梁风致振动研究(E-mail: hy@swjtu.edu.cn).

作者简介: 李永乐(1972—), 男, 河南人, 教授, 博士, 博导, 主要从事桥梁抗风及车桥耦合振动研究(E-mail: lele@swjtu.edu.cn);

王 磊(1993—), 男, 重庆人, 硕士生, 主要从事桥梁设计研究(E-mail: wangleiyuhua@163.com);

陈新中(1964—), 男, 河南人, 教授, 博士, 博导, 主要从事大跨度桥梁及高层结构抗风研究(E-mail: xinzhong.chen@ttu.edu).

构模型试验法,有限元法和解析分析法。

在结构模型试验方法中,通过制作板桁梁相似模型,采用不同加载方式对结构的抗扭性能进行研究。田村周平^[5]制作 6 m 长的板桁梁,测试了不同加载方式下的变形值,计算出板桁梁的扭转刚度。但由于模型试验成本较高,且变参数研究难度较大。因此,采用模型试验单独确定抗扭惯性矩的研究越来越少。

在有限元方法中,通过建立精细化有限元模型,数值计算求解抗扭惯性矩。徐幼麟等^[6-7]建立了青马大桥的板桁梁数值模型,通过变形值反算得到板桁梁的抗扭刚度。韩衍群等^[8]建立了南京大胜关长江大桥的板桁梁数值模型,该方法计算结果可靠度高,但桁架结构较为复杂,精细化模型单元数量巨大,建模过程繁琐,计算效率低。

在解析分析方法中,通过剪切刚度或应变能等效,将桁或板桁等效为连续的板,通过薄壁理论计算抗扭惯性矩。李国豪^[9]依照剪切刚度相等原则,把主桁架腹杆连续化为具有等效剪切效应的连续腹板,求解桁梁桥的挠曲—扭转变形。郭在田^[10]依照应变能相等原则,将主桁架等效为连续板厚。周绪红等^[11]将主桁架等效成连续板厚,与正交异性板组成箱型薄壁梁后采用数值积分的方式求解板桁梁的扭转惯性矩。另有一些学者^[12-13]基于桥面板的剪切变形和 U 肋总体剪切变形一致的原则,提出了正交异性板的等效板厚计算公式。相比模型试验法和有限元法,解析分析方法无需建模,方便快捷,人力物力成本低。已有的研究中,大多未考虑弦杆和竖杆对扭转惯性矩的影响,可能使计算结果带有一定误差。少数考虑弦杆影响,则通过将主桁架等效成连续板厚后与弦杆截面组成整体,采用数值积分求解,导致计算较为复杂,且无法考虑竖杆的影响。

在已有桁架抗扭惯性矩计算公式的基础上,本文推导了考虑弦杆和竖杆对抗扭惯性矩影响的计算公式,改进了正交异性板等效板厚的计算方法,提出了板桁梁抗扭惯性矩的计算公式。并以实际工程为例,对抗扭惯性矩的计算公式进行了验证,以期为大跨度板桁梁桥的设计提供更准确的计算依据。

1 板桁梁等效抗扭惯性矩的计算方法

板桁梁的解析方法中,需将空间体系分解成正交异性板和桁架两部分,分别计算各自的等效板厚度,进一步等效成闭合的矩形薄壁梁,通过薄壁杆

件理论^[10]计算出板桁梁的抗扭惯性矩为:

$$I_t = \frac{4d^2h^2}{\frac{h}{t_1} + \frac{h}{t_2} + \frac{d}{t_3} + \frac{d}{t_4}} \quad (1)$$

式中: d 为薄壁截面(主梁)的宽; h 为薄壁截面(主梁)的高; t_1 、 t_2 、 t_3 和 t_4 分别为主桁架、正交异性桥面板或者上、下平联对应的等效板厚,如图 1 所示。

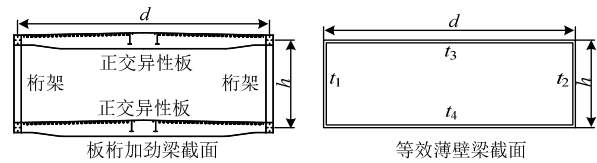


图 1 等效薄壁梁

Fig.1 Equivalent thin-walled beam

2 桁梁等效板厚的解析法

2.1 已有的计算方法

现以 W 型腹杆体系为例(如图 2 所示),简要回顾将桁架等效为连续板厚的两种解析方法:剪切刚度等效和应变能等效。

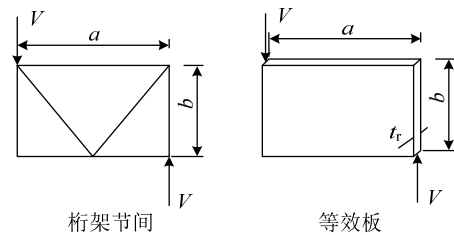


图 2 桁架节间与等效板

Fig.2 Truss section and equivalent plate

在剪切刚度等效的解析方法中,以剪切变形一致为原则,假设^[14]:

- 1) 空间桁架受扭时,其横截面几何形状不变;
- 2) 空间桁架受扭时,忽略弦杆的内力和变形。

可推导出单片 W 型桁架的等效板厚度为:

$$t_r = \frac{2abEA_c}{G(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (2)$$

在应变能等效的解析方法中,假设^[10]:

- 1) 空间桁架受扭时,其横截面几何形状不变;
- 2) 弦杆的轴向力在节间中成线性变化。

可推导出单片 W 型桁架的等效板厚度为:

$$t_r = \frac{E}{2G} \cdot \frac{ab}{a^3 \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_u} \right) + \frac{c^3}{A_c}} \quad (3)$$

式中: V 为节间(或等效板)剪力; a 为节间长度; b 为节间高度; E 为弹性模量; G 为剪切模量; A_0 为

上弦杆截面积； A_u 为下弦杆截面积； A_c 为斜腹杆截面积； c 为斜腹杆长。

由式(2)可见，等效板厚仅与斜腹杆的几何特性和材料特性有关，而在实际结构中，弦杆与竖杆产生的框架效应对抗扭惯性矩的影响是不可忽略的。式(3)中，通过假设弦杆轴力呈线性变化来考虑弦杆对抗扭惯性矩的影响，但不同桁架体系弦杆受力不同，且同一桁架中各弦杆受力不等，难以做出合理假设。基于此，以剪切刚度等效为原则，本文提出了一种考虑了弦杆和竖杆框架效应的主桁架等效板厚的计算方法。

2.2 考虑弦杆和竖杆影响的计算方法

基于剪切刚度等效，取单片桁架的一个节间为例，将桁架对抗扭惯性矩的贡献分为两部分：斜腹杆及弦杆和竖杆形成的框架(如图 3 所示)。分别计算出斜腹杆和框架的等效板厚度，二者之和即为桁架节间的总等效板厚度：

$$t_w = t_r + t_v \quad (4)$$

式中， t_v 为框架的等效板厚度。

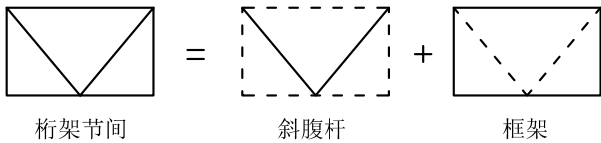


图 3 桁架节间的分离

Fig.3 Discrete of truss section

斜腹杆对抗扭惯性矩所做贡献的推导结果如式(2)所示，本节不再赘述。仅对弦杆和竖杆形成的框架的等效板厚度进行推导。若将单节间某条路径或构件传递的桥面荷载与总桥面荷载之比定义为传力比，已有研究表明^[13]，桥面荷载的传力比几乎不受主梁结构体系与截面内力分布规律的影响，主要与桥面系构件的几何尺寸与布置位置相关。因此，下文推导中未考虑截面剪力分布的差异，而采用了平均剪应力。

对于长为 a ，宽为 b 的框架，弦杆的惯性矩为 I_a ，竖杆的惯性矩为 I_b ，结构的受力体系如图 4(a) 所示。框架结构为三次超静定结构，在竖杆中点截面形成静定结构(见图 4(b))，可得力法的基本方程为：

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

采用图乘法求出各系数和自由项，可求得各未知力为：

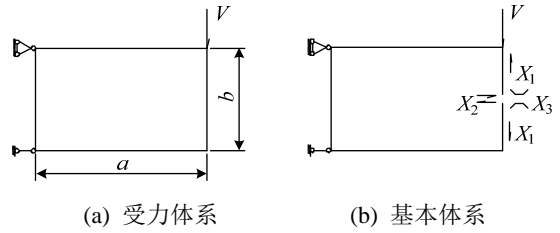


图 4 框架的受力分析

Fig.4 Force analysis of framework

$$X_1 = -\frac{V}{2} \quad X_2 = -\frac{Va}{2h} \quad X_3 = 0 \quad (6)$$

根据位移计算公式，可得框架在外力 V 作用下的竖向位移为：

$$\Delta = \sum \int \overline{M}_P M \frac{ds}{EI_i} \quad (7)$$

式中： \overline{M}_P 为单位荷载作用下的基本结构的弯矩； M 为框架在外力 V 作用下的弯矩； I_i 为框架各杆件的面内抗弯惯性矩。

故框架的垂直位移为：

$$\Delta = \frac{Va^2}{24E} \left(\frac{a}{I_a} + \frac{b}{I_b} \right) \quad (8)$$

框架的剪切角为：

$$\gamma = \frac{\Delta}{a} = \frac{Va}{24E} \left(\frac{a}{I_a} + \frac{b}{I_b} \right) \quad (9)$$

故剪切力为：

$$\tau A = V = GA\gamma \quad (10)$$

式中， A 为等效板的截面积。由 $A=bt_v$ 可得：

$$t_v = \frac{V}{Gb\gamma} \quad (11)$$

将式(9)代入式(11)可得：

$$t_v = \frac{V}{Gb\gamma} = \frac{24EI_a I_b}{Gab(aI_b + bI_a)} \quad (12)$$

将式(2)和式(12)代入式(4)可得桁架节间的总等效板厚度为：

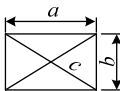
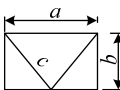
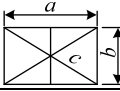
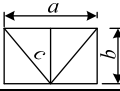
$$t_w = t_r + t_v = \frac{2abEA_d}{G(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{24EI_a I_b}{Gab(aI_b + bI_a)} \quad (13)$$

同理，可以得到其它腹杆体系的桁架的等效板厚度，如表 1 所示。

3 正交异性板等效板厚的解析法

在实际工程中，正交异性板桥面采用的加劲肋分为开口肋和闭口肋。考虑到开口薄壁构件的抗扭惯性矩远远小于闭口薄壁构件的抗扭惯性矩^[10]，无

表 1 3 种计算空间桁架等效板厚度的公式
Table 1 Formula of 3 kinds of calculating equivalent plate thickness

桁架类型	计算方法	计算公式
	方法 1	$t_r = \frac{2abEA_c}{G(a^2 + b^2)^{3/2}}$
	方法 2	$t_r = \frac{E}{G} \cdot \frac{ab}{\frac{a^3}{12} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_u} \right) + \frac{c^3}{2A_c}}$
	本文方法	$t_w = \frac{2abEA_c}{G(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{24EI_a I_b}{Gab(al_b + bl_a)}$
	方法 1	$t_r = \frac{abEA_c}{2G \left(\frac{a^2}{4} + b^2 \right)^{3/2}}$
	方法 2	$t_r = \frac{E}{2G} \cdot \frac{ab}{\frac{a^3}{24} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A_u} \right) + \frac{c^3}{A_c}}$
	本文方法	$t_w = \frac{abEA_c}{2G \left(\frac{a^2}{4} + b^2 \right)^{3/2}} + \frac{24EI_a I_b}{Gab(al_b + bl_a)}$
	本文方法	$t_w = \frac{2abEA_c}{G(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{96EI_a I_b}{Gab(al_b + 2bl_a)}$
		本文方法

注：方法 1 为依据剪切刚度相等的计算公式；方法 2 为依据应变能相等的计算公式；本文公式为考虑了弦杆和竖杆作用的计算公式。

法分担桥面板的剪力流，故忽略开口肋对正交异性板抗扭惯性矩的影响，仅考虑 U 肋的影响。同时，鉴于横梁为非连续构件，对板桁梁整体抗扭惯性矩影响很小^[15]，也忽略其影响。

通过 U 肋范围外的桥面板的剪力流 q 流向 U 肋时，将分成两部分(如图 5 所示)。一部分剪力流 q_d 流向 U 肋范围内的桥面板，另一部分剪力流 q_u 流向 U 肋，最后汇入新的出口，即：

$$q = q_d + q_u \quad (16)$$

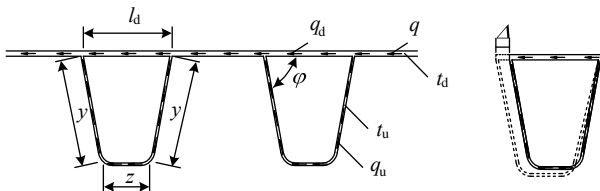


图 5 U 肋的剪力流分布及剪切变形

Fig.5 Shear flow distribution and shear deformation of U-rib

为了得到正交异性板的等效剪切厚度，彭旺虎^[12]从桥面板和 U 肋的剪切变形协调一致的前提出发，选取一个 U 肋结构作为分析单元。文中提出桥面板的剪切变形为 $q_d l_d / (G t_d)$ ，U 肋的总体剪切变形为 $q_u l_u / (G t_u)$ ，故可得：

$$\frac{q_d l_d}{G t_d} = \frac{q_u l_u}{G t_u} \quad (17)$$

式中， l_d 、 l_u 、 t_u 和 t_d 分别为 U 肋的腹板间距、截面周长、壁厚和桥面板厚度。

然而从图 5 可看出，桥面板的剪切变形和 U 肋的总体剪切变形并不一致。由于桥面板与 U 肋在交界处连续，桥面板的剪切变形和 U 肋水平方向的剪切变形相一致更符合实际情况。基于此，重新推导正交异性板的等效剪切厚度公式，即：

$$\frac{q_d l_d}{G t_d} = \frac{2q_u y \cos \varphi}{G t_u} + \frac{q_u z}{G t_u} = \frac{q_u l_d}{G t_u} \quad (18)$$

式中： y 、 z 分别为 U 肋的腹板高度、底板宽度； φ 为桥面板与 U 肋腹板的夹角；且 $l_d = 2y \cos \varphi + z$ 。

将式(16)代入式(18)，可得：

$$q_u = \frac{q t_u}{t_d + t_u} \quad q_d = \frac{q t_d}{t_d + t_u} \quad (19)$$

将一个 U 肋结构等效成一块厚度为 $t_{\#}$ (如图 6 所示)的板，则该板的剪切变形应与 U 肋范围内的桥面板的剪切变形一致，故有：

$$\frac{q l_d}{G t_{\#}} = \frac{q_d l_d}{G t_d} \quad (20)$$

将式(19)代入式(20)得：

$$t_{\#} = t_d + t_u \quad (21)$$

假设在整个桥面板范围内，桥面板宽即桁宽为 b ，桥面板 U 肋的个数为 N ，如图 6 所示。将整个正交异性板等效成一块厚度为 t_e 的板，则该板的剪切变形应与整个正交异性板的剪切变形一致，故有：

$$\frac{q l_d N}{G t_{\#}} + \frac{q(d - l_d N)}{G t_d} = \frac{q d}{G t_e} \quad (22)$$

可得正交异性板的等效剪切厚度 t_e 为：

$$t_e = \frac{d(t_d + t_u)t_d}{d(t_d + t_u) - l_d t_u N} \quad (23)$$

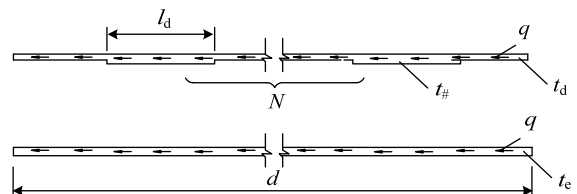


图 6 桥面板的等效剪切厚度

Fig.6 Equivalent shear thickness of bridge deck

对于不同形式的板桁梁，分别将桁架和正交异性板的等效板厚代入式(1)，可得到板桁梁扭转惯性矩的解析表达式。

4 数值验证

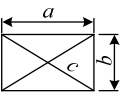
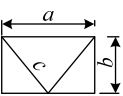
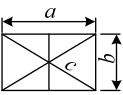
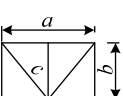
为验证板桁梁抗扭惯性矩的解析表达式，首先以某钢管混凝土拱桥的桁架拱肋横撑为例，验证了考虑弦杆和竖杆影响的桁架抗扭惯性矩的解析表达式。然后以实际大跨度单层和双层板桁梁为例，验证了板桁梁抗扭惯性矩的解析表达式的准确性。

4.1 桁架结构

为单独验证考虑弦杆和竖杆影响的扭转惯性矩解析表达式，以某拱肋横撑的空间桁架为例进行验证分析。该拱肋横撑四个侧面均为 W 型腹杆体系，采用宽 2.5 m，高 2 m 的钢管空间桁架结构，弦杆采用 500 mm×20 mm 的钢管，腹杆(斜杆和竖杆)采用 250 mm×10 mm 的钢管， $A_d=5.969 \times 10^3 \text{ mm}^2$ ， $I_b=2.700 \times 10^3 \text{ mm}^2$ ， $I_a=6.258 \times 10^4 \text{ mm}^2$ 。此外，为了充分验证，建立了其他不同腹杆体系的空间桁架精细化有限元模型。

表 2 4 种方法计算得到的抗扭惯性矩

Table 2 Torsional inertia by 4 kinds of methods to calculate

桁架类型	计算方法	计算值/($\times 10^4 \text{ mm}^2$)	$(J_0 - J_x)/J_0$ (%)
	方法 1(J_1)	437.5	9.84
	方法 2(J_2)	421.7	13.08
	本文公式(J_3)	460.9	5.00
	ANSYS 模型(J_0)	485.2	—
	方法 1(J_1)	288.0	11.96
	方法 2(J_2)	281.1	14.08
	本文公式(J_3)	310.8	5.02
	ANSYS 模型(J_0)	327.2	—
	方法 1(J_1)	437.5	15.23
	方法 2(J_2)	421.7	18.29
	本文公式(J_3)	485.6	5.91
	ANSYS 模型(J_0)	516.1	—
	方法 1(J_1)	288.0	13.96
	方法 2(J_2)	281.1	16.03
	本文公式(J_3)	334.7	0.03
	ANSYS 模型(J_0)	334.8	—

注：方法 1 为依据剪切刚度相等的计算结果；方法 2 为依据应变能相等的计算结果；本文公式为考虑了弦杆和竖杆框架效应的计算结果；ANSYS 模型为有限元计算结果。

$$I_t = \frac{4d^2b^2}{\frac{2(d(t_u + t_d) - l_d t_u N)}{t_d(t_u + t_d)} + \frac{2Gb^2}{E(A_{c1} \sin^2 \phi \cos \phi + 96I_a I_b (I_b + I_a \tan \phi))}} \quad (24)$$

$$I_t = \frac{4d^2b^2}{\frac{d(t_u + t_d) - l_d t_u N}{t_d(t_u + t_d)} + \frac{2Gb^2}{E(A_{c1} \sin^2 \phi \cos \phi + 24I_a I_b (I_b + I_a \tan \phi))} + \frac{Gd^2}{E(A_{c2} \sin^2 \theta \cos \theta + 24I_a I_d (I_d + I_a \tan \theta))}} \quad (25)$$

模型杆件采用 ANSYS 中的 beam4 单元模拟，为消除约束效应和加载区的局部影响，建立了 30 个节段的悬臂数值模型^[11]，根据变形反算得出扭转惯性矩。由于精细化的有限元模型可以考虑各个构件的影响，计算结果可作为桁架模型的精确解。

表 2 给出了 3 种公式计算出的抗扭惯性矩。从表 2 可见，方法 1 与方法 2 计算得出的抗扭惯性矩和有限元计算结果相差较大，在考虑了弦杆和竖杆所形成的框架对抗扭惯性矩的影响后，相对误差得到有效降低。这也表明，在空间桁架结构中考虑弦杆和竖杆对抗扭惯性矩的贡献是必要的。

4.2 板桁结构

为验证板桁结构的惯性矩解析表达式的准确性，以某大跨度双层桥面板桁梁(如图 7 所示)和某大跨度单层桥面板桁梁(如图 8 所示)为例。

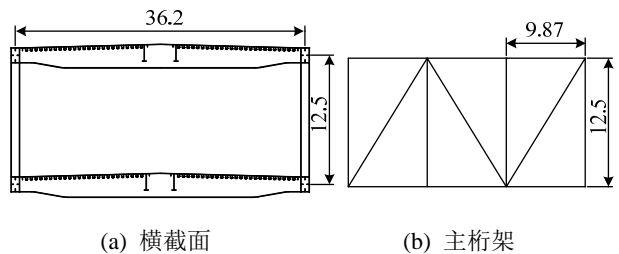


图 7 双层桥面板桁梁 /m

Fig.7 Plate truss girder of double bridge deck

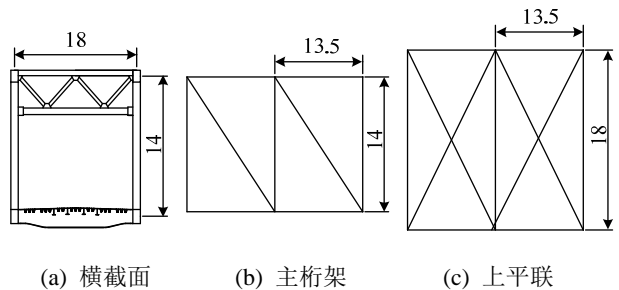


图 8 单层桥面板桁梁 /m

Fig.8 Plate truss girder of single bridge deck

按板桁梁形式分别计算出主桁架、上平联和正交异性桥面板的等效板厚度，代入式(1)可得到各自抗扭惯性矩计算公式，如式(24)和式(25)所示。

式中： ϕ 为主桁架斜腹杆与弦杆的夹角； θ 为上平联斜腹杆与弦杆的夹角； A_{c1} 、 A_{c2} 分别为桁架斜腹杆截面积及上平联斜腹杆截面积。

按照图 7 和图 8 的板桁梁形式，分别建立精细化的 30 个节段悬臂梁模型。弦杆和斜腹杆采用 ANSYS 中的 beam4 单元模拟，正交异性板采用 shell63 单元模拟。弦杆和桥面板、横梁的连接采用自由度耦合的方式形成刚性域^[16-20]，保证局部刚度的整体性。双层板桁梁精细化有限元模型如图 9 所示。

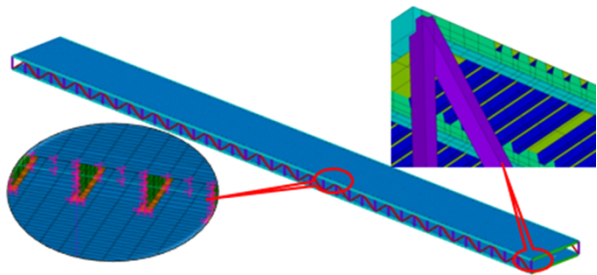


图 9 双层桥面板桁梁有限元模型

Fig.9 Finite element model of plate truss girder of double bridge deck

本文方法与精细化模型的计算结果对比如表 3 所示。从表 3 可以看出，本文方法与精细化模型的计算结果存在一定差距，但差距很小。这说明以上公式的计算结果是具有较高精度的。

表 3 抗扭惯性矩的对比

Table 3 Contrast of torsional inertia

板桁梁	本文方法 X_1/m^4	精细化模型 X_2/m^4	相对误差 (X_1-X_2)/ X_1 (%)
双层桥面	91.86	88.64	3.51
单层桥面	19.54	18.97	2.92

5 结论

基于剪切刚度等效的原理，推导了考虑弦杆和竖杆影响的桁架抗扭惯性矩的解析表达式，改进了正交异性板等效成连续板厚的计算方法，得到了板桁梁抗扭惯性矩的解析公式，并通过实际工程的精细化有限元模型对解析公式进行了验证。结果表明：基于剪切刚度等效的原则，考虑弦杆和竖杆的框架效应后，空间桁架抗扭惯性矩的计算准确性得到有效提高。考虑桥面板和 U 肋在水平方向剪切变形一致后，得到的板桁梁扭转惯性矩的解析表达式具有较高的准确性。

参考文献：

[1] 小西一郎. 钢桥：第三分册[M]. 朱立东，应达之，许克宾，等，译. 北京：人民铁道出版社，1980：95—97.

Konishi I. Steel bridge: the third volume [M]. Translated by Zhu Lidong, Ying Dazhi, Xu Keping, et al. Beijing: China Railway Publishing House, 1980: 95—97.

[2] Matson D D. China lions' gate suspended structure replacement [C]// ASCE. Structures Congress 2005: Metropolis and Beyond. New York: ASCE, 2005: 1—8.

[3] 康晋，段雪炜，徐伟. 平潭海峡公铁两用大桥主桥整节段全焊钢桁梁设计[J]. 桥梁建设，2015，45(5)：1—6. Kang Jin, Duan Xuewei, Xu Wei. Design of full block and all-welded steel truss girder of mian bridge of pingtan straits rail-cum-road bridge [J]. Bridge Construction, 2015, 45(5): 1—6. (in Chinese)

[4] 童林鸿，王林. 安庆长江铁路大桥主桥无索区钢桁梁架技术[J]. 桥梁建设，2013，43(3)：37—41. Tong Linhong, Wang Lin. Erection techniques for steel truss girder of main bridge of anqing changjiang river river railway bridge in areas without stay cables [J]. Bridge Construction, 2013, 43(3): 37—41. (in Chinese)

[5] 田村周平. 吊桥补刚トラスと床組鋼床板との合成構造について(No.1)[J]. 桥梁，1974，10(3)：38—52. Tian Cunzhouping. Combination structure of Stiffening girder of suspension bridge and steel bridge panel [J]. Bridge, 1974, 10(3): 38—52. (in Japanese)

[6] Xu Y L, Ko J M, Yu Z. Modal analysis of tower-cable system of tsing ma long suspension bridge [J]. Engineering Structures, 1997, 19(10): 857—867.

[7] Ko J M, Xue S D, Xu Y L. Modal analysis of suspension bridge deck units in erection stage [J]. Engineering Structures, 1998, 20(12): 1102—1112.

[8] 韩衍群，叶梅新，罗如登. 整体桥面钢桁梁桥桥面荷载传递途径的研究[J]. 铁道学报，2008，30(1)：65—69. Han Yanqun, Ye Meixin, Luo Rudeng. Study on the load transfer routine in truss bridges with integral decks [J]. Journal of the China Railway Society, 2008, 30(1): 65—69. (in Chinese)

[9] 李国豪. 桁梁扭转理论—桁梁桥的扭转、稳定和振动[M]. 北京：人民交通出版社，1975：1—11. Li Guohao. Truss-girder Torsion Theory—Torsion, stability and vibration of truss-girder bridge [M]. Beijing: China Communications Press, 1975: 1—11. (in Chinese)

[10] 郭在田. 薄壁杆件的弯曲与扭转[M]. 北京：人民交通出版社，1989：126—131. Guo Zaitian. Bend and torsion of thin-walled bar [M]. Beijing: China Communications Press, 1989: 126—131. (in Chinese)

[11] 周绪红，秦凤江，狄谨，等. 基于能量原理的板桁结合型加劲梁连续化分析方法[J]. 中国公路学报，2014，27(6)：34—43. Zhou Xuhong, Qin Fengjiang, Di Jin, et. Continuous analysis method for deck-truss composite stiffening girder based on energy principle [J]. China Journal of Highway and Transport, 2014, 27(6): 34—43. (in Chinese)

- [12] 彭旺虎. 合成桥面桁梁悬索桥静动力分析理论研究 [D]. 湖南: 湖南大学, 2013: 47—49.
Peng Wanghu. Analytical theory for static and dynamic characteristics of suspension bridges stiffened by truss girders with integral orthotropic deck [D]. Hunan: Hunan University, 2013: 47—49. (in Chinese)
- [13] 秦凤江. 板桁结合型加劲梁受力机理与计算理论研究 [D]. 西安: 长安大学, 2015: 74—78.
Qin Fengjiang. The research for the stress mechanism and the calculating theory of deck-truss composite stiffening girder [D]. Xi'an: Chang'an University, 2015: 74—78. (in Chinese)
- [14] 徐格宁. 空间桁架扭转惯性矩的计算[J]. 太原重型机械学院学报, 1984(1): 43—54.
Xu Gening. Calculation of torsional moment of inertia of the space truss [J]. Journal of Taiyuan Heavy Machinery Institute, 1984(1): 43—54. (in Chinese)
- [15] 秦竟熙, 张明金, 李永乐. 大跨度公铁两用斜拉桥板桁主梁受力特性研究[J]. 桥梁建设, 2014, 44(6): 46—51.
Qin Jingxi, Zhang Mingjing, Li Yongle. Study of mechanical characteristics of plate and truss main girder of long span rail-cum-road cable-stayed bridge [J]. Bridge construction, 2014, 44(6): 46—51. (in Chinese)
- [16] 李小珍, 王聪, 肖林, 等. 斜拉桥钢-混凝土结合梁的受力性能试验研究[J]. 工程力学, 2015, 32(9): 191—199.
Li Xiaozhen, Wang Cong, Xiao Lin, et. Test study for mechanical behavior of steel-concrete composite girder of cable-stayed bridge [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(9): 191—199. (in Chinese)
- [17] Ribeiro D, Calçada R, Delgado R, et al. Finite element model updating of a bowstring-arch railway bridge based on experimental modal parameters [J]. Engineering Structures, 2012, 40: 413—435.
- [18] 谢伟平, 刘亨. 城市轨道交通“公轨合一”型高架桥车桥耦合振动分析[J]. 工程力学, 2016, 32(02): 119—126.
Xie Weiping, Liu Heng. Vehicle-bridge interaction analysis of a super bridge in urban railway system [J]. Engineering Mechanics, 2016, 32(02): 119—126. (in Chinese)
- [19] 童根树, 王继涛, 张磊. 箱形柱与工字梁连接节点翘曲变形的传递分析[J]. 工程力学, 2011, 28(6): 96—102.
Tong Genshu, Wang Jitao, Zhang Lei. Warping transfer through joints of RHS column and I-beam [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(6): 96—102. (in Chinese)
- [20] 张炎圣, 陆新征, 叶列平, 等. 超高车辆-桥梁上部结构碰撞荷载精细有限元模拟与简化计算[J]. 工程力学, 2011, 28(1): 116—123.
Zhang Yansheng, Lu Xinzheng, Ye Lieping, et al. High precision finite element simulation and simplified calculation for the collision load between over-high truck and bridge superstructure [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(1): 116—123. (in Chinese)