

文章编号: 1000-4750(2018)02-0001-12

子结构混合试验方法研究与应用

王 涛¹, 潘 鹏²

(1. 中国地震局地震工程与工程振动部门重点实验室, 中国地震局工程力学研究所, 黑龙江, 哈尔滨 150080;

2. 清华大学土木工程安全与耐久教育部重点实验室, 北京 100084)

摘 要: 子结构混合试验是再现大型结构复杂地震响应的最有效方法之一。该文总结了子结构混合试验在过去 30 年发展过程中所面临的主要问题。子结构混合试验需要一个稳定而精确的时间积分算法用于求解结构的动力方程, 而这些时间积分方法需要对试验子结构提供显式的位移加载命令, 并且最好具有抑制试验引入误差的能力。第二个挑战是隐式数值域和显式物理域的高效协同, 主要采用了刚度预测方法和预测修正技术。最后, 子结构的边界条件需要精确的施加到相应的边界上。这对于试验子结构是主要难点, 因为现有加载仪器精度和数量的不足。为此发展了基于重叠领域的柔性加载制度和力-位移混合控制方法。为了使子结构混合试验的能力和精度最大化, 近年来采用互联网技术将多个试验室资源连接起来, 并引入大型商业有限元软件进行精细化模拟, 这促成了三代可扩展的子结构混合试验平台。这些平台的柔性、可扩展性和精确性均通过一系列试验得到了验证。

关键词: 子结构混合试验; 边界协调; 时间积分方法; 柔性加载制度; 力-位移混合控制

中图分类号: TU317 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2017.06.ST05

STUDY AND APPLICATION OF SUBSTRUCTURE ONLINE HYBRID TEST METHOD

WANG Tao¹, PAN Peng²

(1. Key Laboratory of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, Institute of Engineering Mechanics, CEA, Harbin, Heilongjiang 150080, China;

2. Key Laboratory of Civil Engineering Safety and Durability of China Education Ministry, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The substructure online hybrid test is one of the most effective methods to reproduce the complex seismic behavior of large scale structures. This paper summarizes the major challenges that have been solved in the past thirty years. The dynamics of a target structure can be solved by a stable and accurate time integration algorithm which shall provide an explicit displacement command for the tested substructure and be better have the capability to mitigate the error introduced by the experimental domain. The second challenge is to coordinate the implicit numerical substructure with the explicit tested substructure, for which either a stiffness predicting scheme or a predicting and correcting scheme shall be employed. Finally, the boundary conditions between substructures shall be precisely exerted on each substructure, which might be difficult for tested substructures because of the limited resolution and number of loading devices. To this end, the flexible loading scheme based on overlapping domains and the force-displacement mixed control are developed. To maximize the capacity and to improve the accuracy of the online hybrid test, the resources of different labs and finite element software are expected to be incorporated into the system, which initiate three generations of scalable frameworks for hybrid tests. The flexibility, extensibility and accuracy of the proposed three frameworks have been demonstrated by a series of real

收稿日期: 2017-06-02; 修改日期: 2017-11-26

基金项目: 中国地震局工程力学研究所基本科研业务费专项项目(2017A02); 国家自然科学基金项目(51378478, 51678538)

通讯作者: 王涛(1977-), 男, 山东人, 研究员, 博士, 主要从事结构抗震试验方法、建筑地震易损性等方面的研究(E-mail: wangtao@iem.ac.cn).

作者简介: 潘鹏(1976-), 男, 湖北人, 教授, 博士, 主要从事工程结构抗震研究(E-mail: panpeng@tsinghua.edu.cn).

applications to reproduce the seismic responses of complex structures to collapse.

Key words: substructure online hybrid test, boundary coordinating; time integration algorithm; flexible loading scheme; force-displacement mixed control

1 子结构混合试验的概念和发展

混合试验最早在 1969 年由 Hakuno 等^[1]首次提出,是现今两种获得工程结构地震需求的试验方法之一。混合试验利用计算机求解结构的动力方程(式(1)),而结构的恢复力 f 采用物理加载获取。当恢复力 f 仅是位移的函数时,即速度不敏感结构,可采用拟静力加载的方式获取,因此也叫拟动力试验。混合试验的动力部分(包括惯性力和粘滞阻尼力)在计算机中模拟,避免了在试验体上建造昂贵的惯性质量,加载设备也不用克服惯性力,因此可实现大比例尺的试验。另一方面,可采用传统的拟静力加载设备进行加载,不需要特殊的动力加载设备,代价小,在土木工程试验室中更容易得到普及。由于这些原因,混合试验技术在过去 30 年间得到了密切关注和重大发展^[2-5]。

$$ma + cv + f(d, v) = -ma_g \quad (1)$$

20 世纪 70 年代~20 世纪 90 年代可视作混合试验发展的第 1 阶段。在这个时期,研究人员主要关注适用于混合试验的算法研究。混合试验需要为物理加载域提供显式的位移命令,而显式的时程积分方法往往是条件稳定的,对于刚度较大的结构需要较小的积分步长。为解决这个问题,一些研究人员在隐式无条件稳定算法的基础上进行改造,提出了一系列无条件稳定的显式算法,可直接应用于混合试验,比较典型的有中央差分法^[6]、Chang 方法^[7]和 γ 方法^[8]等。另外也有研究人员坚持应用隐式算法,采用算子分离方法,将目标位移分离为显式和隐式两部分,将显式部分提供给非线性物理域避免其迭代过程,而隐式部分参与线性迭代过程进行修正,比较典型的方法为 OS 方法^[9]和 α -OS 方法^[10]。另一种比较独特的方法是将隐式迭代过程与加载控制循环有机结合起来,在加载控制中设定固定的循环次数,每次循环对应于一次隐式迭代,可实现试验的连续加载^[11]。在这个时期,研究人员重点关注了混合试验算法的稳定性和精确性,即考察积分算法对试验引入误差的抑制效果,发现在算法中设置数值阻尼可有效控制试验误差引入的不平衡能量,避免动力系统发散^[7,10]。

随着减隔震技术在工程中的广泛应用,工程结构的恢复力不仅与位移相关而且与速度相关,这时仅仅依靠拟静力加载难以再现结构的力学特征。1992 年日本中岛正爱教授提出了实时混合试验方法^[12],利用作动器快速加载实现时间域内 1:1 的真实加载。这就要求在每个时间步长 Δt (通常为 10 ms~20 ms)内完成动力方程求解、命令发送、动力加载、反应反馈等一系列步骤,其关键在于避免因动力方程求解、动力加载系统延时而造成的发散现象。为此,研究人员一方面追求动力方程的快速求解方法,比如使用较大的步长和交替积分的方式^[13];另一方面发展鲁棒的控制算法改善试验体非线性带来的控制难题^[14-18],提出时滞补偿算法解决动力加载系统本身固有的延迟现象^[19-24]。近年来由于计算机技术和控制技术的快速发展,动力方程甚至非线性数值子结构已经可以实现实时求解,结合振动台加载系统,形成了振动台混合试验系统^[21-23],利用振动台台面作为结构的边界,以数值子结构分析结果作为输入,数值子结构计算时也需要考虑振动台的力和位移的反馈。在边界条件和动力系统较为简单的情况下,振动台也可与作动器协同控制实现子结构的动力试验^[25-30]。

工程结构的地震破坏是从最薄弱的地方开始的,而地震能量和变形也向最薄弱的地方集中,这些部位在大变形下力学行为十分复杂,需要进行试验才能理解和把握,但结构其余部分损伤程度相对较低,用现有的数值手段模拟可具有较高的精度。这种情况往往是普遍的,那么就没有必要针对整体结构进行试验,而是针对行为复杂难以理解的部分进行试验,而其他部分进行数值模拟,这也就是子结构混合试验的概念,如图 1 所示。子结构混合试验最早由 Mahin 等教授^[31-32]在 20 世纪 80 年代提出,在从 1999 年开始的美国 NEES 计划中得到了迅速发展和应用^[33]。与传统的混合试验和实时混合试验技术相比,子结构混合试验,特别是采用了网络技术将多个试验室的资源结合在一起而形成的分布式子结构混合试验,具备了采用大比例尺模型再现大型复杂工程地震失效的能力^[34-35]。美国伊利诺伊州立大学 Kwon 等^[36]研发了 UI-SimCor 系统,

其协调器用于求解动力方程，采用预测修正的 HHT-A 算法。各个子结构的边界采用相同的预测位移，因而协调条件自动满足，平衡条件在协调器求解动力方程的时候得到满足。欧洲 ELSA 实验室的 Pinto 等^[37]对一座含六个桥墩的桥梁进行了抗震性能检测试验，其中两个桥墩作为试验子结构，其余作为数值子结构，试验证实了整桥的抗震性能不足。日本 Kyoto 大学的 Watanabe 等^[38]对一个基础隔震桥梁进行了基于网络的远程协同并行拟动力试验，桥梁主结构在主计算机中进行计算，一个隔震支座由主计算机控制，其他支座由 250 km 外的分电脑控制，它们之间采用网络交换数据。测试结果表明数据传输速度能满足拟动力试验的要求。我国台湾地震工程研究中心构建了基于数据库分布式混合试验平台^[39]，并和加拿大之间开展了远程协同子结构试验。模型选用一座含 4 个桥墩的桥梁，分别在台湾和加拿大进行 3 个子结构试验，另 1 根进行数值模拟。我国湖南大学提出了 e-test 的构想，并建设了网络化结构实验室 NetSLab^[40]，开发了远程试验通讯平台和试验平台，与哈尔滨工业大学、清华大学、美国南加州大学等之间成功的开展了子结构混合试验，研究了多跨桥梁 FRP 加固钢筋混凝土短柱结构的地震响应^[41]。在混合试验中，针对子结构分别处理，联合起来完成整体结构的混合试验方法，其成功的关键在于，数值子结构的精确性和复杂边界条件的准确实现。近年来的子结构混合试验技术结合了大型有限元软件^[42-43]，大幅度提升了数值子结构的精确性。美国加州大学伯克利分校提出了 OpenFresco^[44]系统，这是介于有限元软件和试验子结构之间的一种接口程序，提供与有限元的接口和与各种试验加载设备的通讯，整体结构在有限元软件里面进行模拟，其中试验子结构被视为试验单元，其力学特性均由试验得到。子结构之间的协调通过 OpenFresco 自动实现，平衡条件在有限元整体分析中得到保证。边界条件的物理实现也是子结构混合试验成功的关键之一。近年来，研究人员研发了多种高效空间加载装置，可实现复杂的多自由度边界条件的同步加载^[45]。本团队在过去 15 年内发展了三代子结构混合试验框架^[46]，结合网络技术，实现了高度的可扩展性和可移植性，具备了大规模推广应用的条件。

本文首先针对常用的时间直接积分方法进行总结和讨论，利用谱半径方法分析线性体系的稳定

性和精确性，接着针对如何结合有限元数值子结构问题和如何实现复杂边界计算和加载问题分别进行讨论，然后介绍本团队在过去十五年中发展的三代分布式子结构混合试验平台，并就第三代平台的应用进行介绍，最后通过总结过去发展经验，结合现今地震工程的新需求，提出混合试验的发展方向，以供读者批评指正。

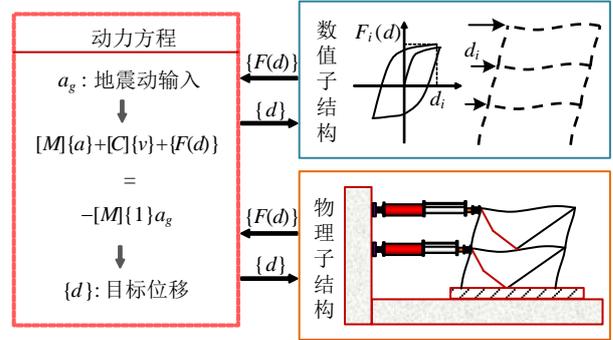


图 1 子结构混合试验概念原理

Fig.1 Concept of substructure online hybrid test method

2 常用时间积分方法及其数值特征

由于地震动的随机性结构地震响应很难有解析解，一般将结构动力方程在时间域里按照时间步长 Δt 进行离散，仅在 $n\Delta t$ 上保持动力平衡，而在时间步长之内放松平衡条件，但位移、速度、加速度需要满足一定的差分方程，如此可求得针对某个地震动的结构响应，比如典型的 Newmark- β 方法^[47]，其动力平衡方程式(2)所示，位移和速度需要分别满足式(3)和式(4)的差分方程，其中 β 和 γ 是常数。对 β 和 γ 采取不同的数值可得到 Newmark 方法的不同类型，如表 1 所示，其中 $\beta=0.25$ 和 $\gamma=0.5$ 也称为平均加速度法，而 $\beta=0$ 和 $\gamma=0.5$ 称为显式 Newmark 方法。

$$ma_{n+1} + cv_{n+1} + kd_{n+1} = f_{n+1} \quad (2)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta tv_n + (0.5 - \beta)\Delta t^2 a_n + \beta\Delta t^2 a_{n+1} \quad (3)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t(1 - \gamma)a_n + \Delta t\gamma a_{n+1} \quad (4)$$

表 1 Newmark 方法的不同形式及其数值特征^[47]

Table 1 Various forms and numerical characteristics of Newmark methods^[47]

名称	β	γ	稳定性	精确性
平均加速度法(梯形公式)	1/4	1/2	无条件稳定	2 阶
线性加速度法	1/6	1/2	$\Omega_{crit} = 2\sqrt{3} \approx 3.5$	2 阶
Fox-Goodwin 方法	1/12	1/2	$\Omega_{crit} = \sqrt{6} \approx 2.4$	4 阶
显式 Newmark 方法	0	1/2	$\Omega_{crit} = 2$	2 阶

注: $\Omega = \omega\Delta t$ ，其中 ω 是结构圆频率。

在时间离散系统中，只有当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，才能得到精确解，在其他情况下，离散系统的结果将与精

确解有所不同,具体情况将由位移和速度的差分方程确定。为了确定求解方法的数值特征,通常对线性系统采用谱半径分析的方法分析其稳定性和精确性^[48]。为此,可将动力平衡方程和差分方程写成递归矩阵的形式,如下式:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_n + \mathbf{L}f_{n+1} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{X}_n = \{d_n, v_n, a_n\}^T$ 称为 $n\Delta t$ 时刻的状态向量; 而 \mathbf{A} 称为递归矩阵,是仅与结构动力特性相关的常数正定矩阵; \mathbf{L} 是荷载算子。那么针对递归矩阵的特征值分析将得到以其特征值 λ_i 为对角元素的对角矩阵和特征向量矩阵。定义谱半径 $\rho(\mathbf{A})$ 为绝对值最大的特征值,如下式:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i| \quad (6)$$

那么当且仅当 $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,系统才是有界的,或者是稳定的。

由特征值 λ_i 可得到微分方程的一般解,一般情况下 3 个特征值中有一对是共轭复数 $\lambda_{1,2}$, 称为主根,由式(7)确定,另一个是实数 λ_3 , 称为虚根,那么一般解可由式(8)确定:

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi = \exp[\bar{\Omega}(-\bar{\xi} \pm i)] \quad (7)$$

$$d_n = \exp(-\bar{\xi}\bar{\omega}t_n)(c_1 \cos \bar{\omega}t_n + c_2 \sin \bar{\omega}t_n) + c_3 \lambda_3^n \quad (8)$$

其中: $\bar{\Omega} = \arctan(B/A)$; $\bar{\omega} = \bar{\Omega}/\Delta t$; $\bar{\xi} = -\ln(A^2 + B^2)/(2\bar{\Omega})$ 。那么精确性可由数值阻尼 $\bar{\xi}$ 和周期误差 $(\bar{T} - T)/T$ 确定,此处, $T = 2\pi/\omega$, $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$ 。

由式(5)~式(8)确定 Newmark 方法的稳定性和精确性,分别列在表 1 及图 2 中,可以看出除了平均加速度法是无条件稳定的,其余的方法都是条件稳定的,这些算法都没有数值阻尼,而周期误差随着结构频率和步长的增加而增大,因此需要将步长控制在较低的水平之下。

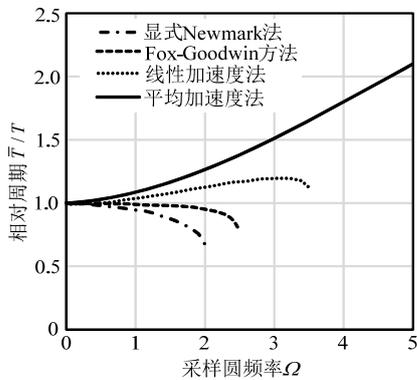


图 2 Newmark 方法周期误差比较

Fig.2 Periods distortion of Newmark methods

平均加速度法是无条件稳定的方法,在满足精度的条件下,可采用较大的积分步长,有效提高混合试验效率,但是其关于位移的差分方程(式(3))是隐式的,意味着无法直接应用于试验加载。而显式 Newmark 方法的位移差分方程是显式的,可直接应用于混合试验,但其稳定性受到积分步长和结构自身频率的限制。为此,一些研究人员提出了无条件稳定的显式方法,比如 Chang 方法^[7]和 Gui 方法^[49]等,但是,他们提出的方法中没有控制算法阻尼的参数,无法抑制虚假的高阶振型发散问题。本文作者在 HHT- α 法^[50]的基础上构造了一种新型显式无条件稳定算法^[51],如式(9)~式(15)所示。式中通过调整 α 的取值,使算法获得可抑制高阶振型的阻尼比,一般 α 在 $[-0.5, 0]$ 之间取值,当 $\alpha=0$ 时,方法为平均加速度法。通过谱半径方法,获得该方法的数值特征如图 3 所示。

$$ma_{n+1} + (1 + \alpha)cv_{n+1} - \alpha cv_n + (1 + \alpha)kd_{n+1} - \alpha kd_n = (1 + \alpha)f_{n+1} - \alpha f_n \quad (9)$$

$$d_{n+1} = \beta_1 d_n + \beta_2 v_n + \beta_3 a_n \quad (10)$$

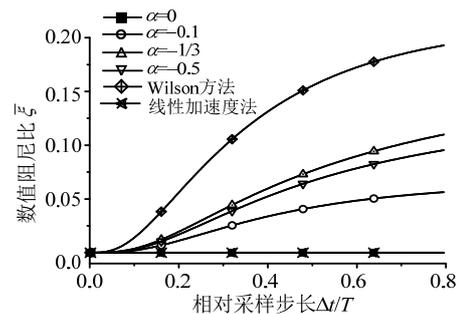
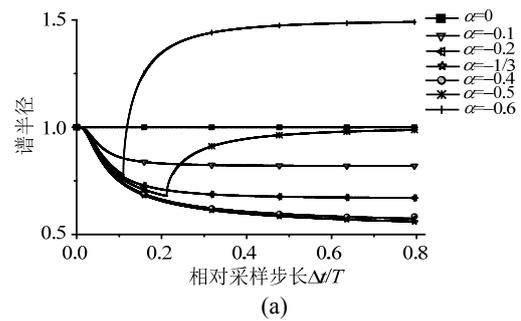
$$v_{n+1} = v_n + \Delta t(1 - \gamma)a_n + \Delta t\gamma a_{n+1} \quad (11)$$

$$\beta_1 = \frac{m + (1 + \alpha)\gamma\Delta tc + \alpha\beta\Delta t^2 k_0}{\hat{\theta}} \quad (12)$$

$$\beta_2 = \frac{m\Delta t + (\gamma + \alpha\gamma - \beta)\Delta t^2 c}{\hat{\theta}} \quad (13)$$

$$\beta_3 = (0.5 - \beta) \frac{\Delta t^2 m + (1 + \alpha)\gamma\Delta t^3 c}{\hat{\theta}} \quad (14)$$

$$\hat{\theta} = m + (1 + \alpha)\Delta t(\gamma c + \beta\Delta t k_0) \quad (15)$$



(b)

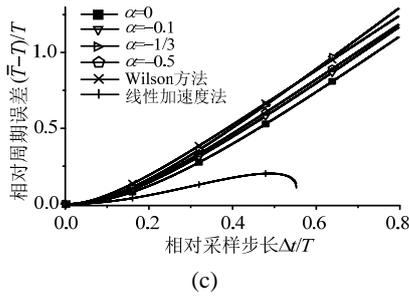


图3 无条件稳定显式算法的数值特征

Fig.3 Numerical characteristics of explicit algorithm with unconditional stability

3 子结构混合试验关键科学问题

近 20 年来,子结构混合试验最主要的问题在于如何提升混合试验的精度。这要从两个方面来考虑,一方面是利用有限元技术提升数值子结构的模拟精度,另一个是准确实现复杂边界的计算和加载控制,确保子结构之间的协调和平衡。

3.1 数值域与物理域协调理论

将有限元引入混合试验固然能够提升数值子结构的模拟精度,但也带来了新的问题。由于有限元方法经常采用隐式算法,需要针对材料非线性和几何非线性进行迭代求解,这与试验子结构需要明确的位移条件,无法迭代和尝试形成了固有矛盾。为此,研究人员进行了两种尝试。

第 1 种尝试是试验单元方法,即将试验子结构看作有限元模型的一部分,此时数值子结构实际上负责求解整体模型的动力响应,而试验子结构则负责提供响应的恢复力和刚度矩阵,以便于在有限元模型中形成整体刚度矩阵进行求解,但是加载误差会对试验体刚度造成很大的影响,不准确的刚度矩阵难以融入到有限元求解过程中,甚至会造成整体分析的不收敛,而始终采用初始刚度矩阵将引入巨大的误差,如图 4 所示。为了获得准确的刚度矩阵,一种行之有效的方法是采用智能刚度预测技术^[52],如图 5 所示。这种方法将利用前面几步的信息(一般为之前 3 步的数据),采用最小二乘法进行拟合,得到拟合后刚度,并自动捕捉加载路径上与拟合刚度最近的点 p ,点 p 和当前加载所得的点 S_3 之间的连线即为预测切线刚度。经过混合试验检验可知,这种方法可大幅度的消除不平衡能量,与采用初始刚度的方法相比,可降低约 40% 的不平衡能量。该稳定刚度和所对应位移的恢复力将进入有限元程序,形成整体刚度矩阵和残余力向量,便于下一次的迭代求解。采用类似技术的还有美国加州伯克利大学

开发的 OpenFresco 混合试验平台^[44]。

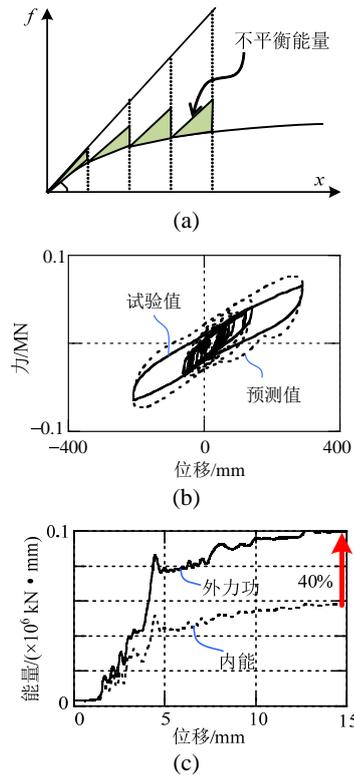


图 4 采用初始刚度造成的误差与试验结果^[52]

Fig.4 Error introduced by prediction using initial stiffness and test results^[52]

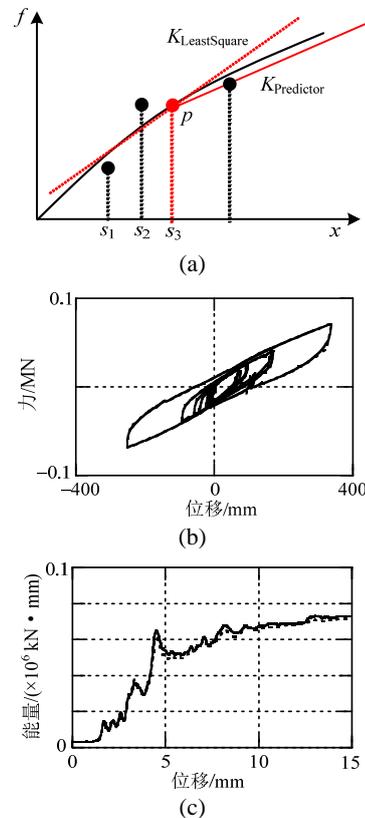


图 5 智能刚度预测技术及其效果^[52]

Fig.5 Smart prediction method and its effectiveness^[52]

第1种尝试需要修改有限元程序的代码,当使用商业有限元程序时,这将带来不便。因此第2种尝试将有限元和试验看作平等的子结构,编制协调器使双方满足平衡和协调条件。由于使多个子结构之间满足平衡条件的边界位移是未知的,即使针对线性系统也需要尝试获得,为了避免对试验子结构的迭代,本文作者设计了预测-加载-修正的三段式协调方法^[53],如图6。数值子结构始终处于非线性状态,可以从上一个确定的满足平衡条件的状态不断尝试以确定当前步的位移;同时对于试验子结构,在当前步中假定为线性的,从上一个确定的状态采用初始刚度进行预测。当预测位移在数值子结构和试验子结构上尝试加载后,两部分返回的边界反力恰好平衡时,则认为该预测位移为正确的边界位移,试验子结构可以以此为目标进行加载。加载后,由于试验体的非线性,边界平衡条件将不能维持,这时,基于当前状态,再次进行修正迭代,以修正不平衡力,此时,试验子结构再次采用线性假定,采用初始刚度进行修正。在预测和修正过程中,数值子结构始终是非线性分析,但每次尝试均从上一步确定的状态开始。当然,线性假设必然引入误差,该误差也可采用谱半径方法进行分析,其分析结果表明,只要线性假设的刚度大于等于真实刚度,那么系统就是稳定的;在所取线性刚度是真实刚度100倍情况下,在 $\bar{\Omega}=0.6$ 时,周期误差约为2%,而当 $\bar{\Omega}=4$ 时,仍然与平均加速度法具有类似的精度^[43]。通过这种方式,将数值子结构和试验子结构平等对待,采用封装的方式和标准的边界位移和反力接口,避免修改有限元代码,从而增强混合试验系统的适用性和可扩展性。

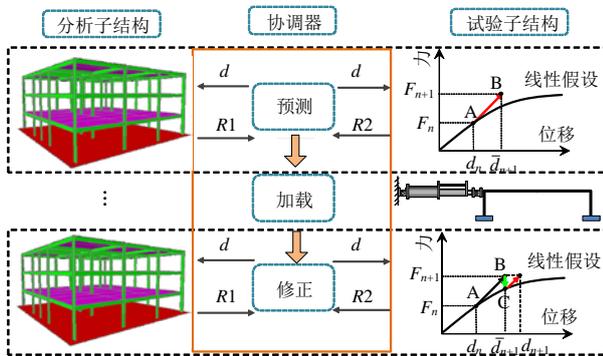


图6 预测-加载-修正的协调方法

Fig.6 Coordination method with predicting, loading and correcting stages

3.2 复杂边界协调技术

子结构之间的边界条件能否准确实现是保证

混合试验精确性的关键,这里包含了两个问题:复杂边界的协调计算和物理加载。子结构的划分往往暴露出更多的自由度,比如一个一层门式框架,如图7所示,如果只考虑水平向的动力特性,可以看作单自由度体系,梁和柱的转动在节点上自动保证平衡和协调,在水平方向则体现为一个凝聚后的单自由度刚度,但是如果将该框架在梁1/3跨的位置划分为两个子结构,那么边界上暴露出来2和3两个静力自由度,静力自由度位移无法采用差分方程直接预测^[54],因为它们需要满足每个子结构自身的静力平衡条件,为此需要知道子结构的刚度矩阵,但这在封装条件下往往是难以实现的。因此如何利用边界上标准的力-位移接口实现边界位移的求解,这是实现复杂边界协调计算的关键问题。为此,文献[53]提出采用拟牛顿方法实现边界位移的求解,拟牛顿方法利用边界上的位移增量和相应的不平衡力增量,在一个近似的刚度矩阵上迭代求解,逐渐逼近真正的切线刚度矩阵,同时求得满足平衡条件的位移,使得边界上的不平衡力最小,如图8所示。在这个过程中,拟牛顿方法并不需要知道子结构的整体刚度矩阵,而只用边界刚度矩阵即可,在各子结构求解时,已经自动将内部自由度凝聚到边界自由度上。拟牛顿方法在运行过程中,不但形成了真正的边界刚度矩阵,还给出了满足子结构平衡条件的边界位移,因此特别适用于子结构混合试验方法,拟牛顿过程如式(16)~式(20)所示,其中 Ψ 是边界不平衡力, d 是边界位移, K 是边界刚度矩阵, P 是边界上外力。

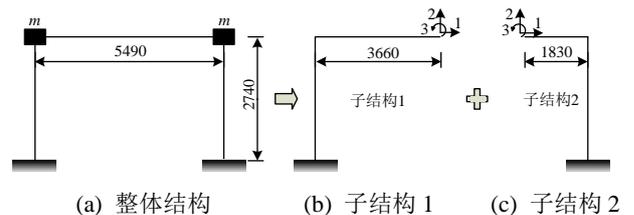
$$\{\Psi\} = K\{d\} - \{P\} = 0 \quad (16)$$

$$\{d^i\} = \{d^{i-1}\} - [K^{i-1}]^{-1}\{\Psi^{i-1}\} \quad (17)$$

$$[K^i]^{-1} = \left([I] - \frac{\{\Delta d^i\}\{\Delta \Psi^i\}^T}{\{\Delta d^i\}^T\{\Delta \Psi^i\}} \right) [K^{i-1}]^{-1} \times \left([I] - \frac{\{\Delta \Psi^i\}\{\Delta d^i\}^T}{\{\Delta d^i\}^T\{\Delta \Psi^i\}} \right) + \frac{\{\Delta d^i\}\{\Delta d^i\}^T}{\{\Delta d^i\}^T\{\Delta \Psi^i\}} \quad (18)$$

$$\{\Delta d^i\} = \{d^i\} - \{d^{i-1}\} \quad (19)$$

$$\{\Delta \Psi^i\} = \{\Psi^i\} - \{\Psi^{i-1}\} \quad (20)$$



(a) 整体结构 (b) 子结构1 (c) 子结构2

图7 单层单跨框架结构^[54]

Fig.7 One-bay one-story frame structure^[54]

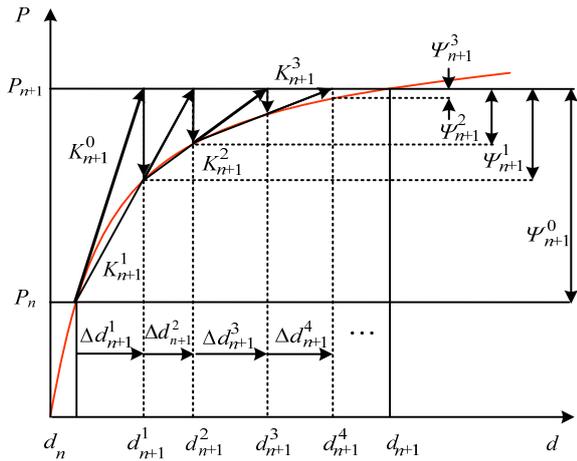
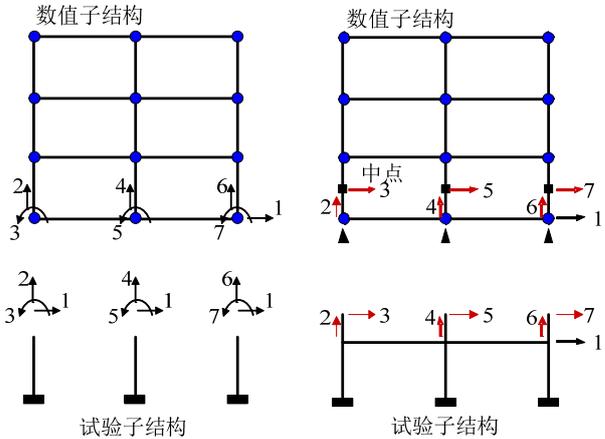


图8 采用拟牛顿方法的子结构边界协调计算^[53]

Fig.8 Coordinating of substructural boundaries by quasi-Newton method^[53]

混合实验中采用液压加载设备进行加载^[55]，液压加载设备的分辨率和加载精度是有限的，特别是在对大刚度结构进行位移控制加载时，往往出现较大的误差，甚至危及整个试验的顺利进行。为此，一方面需要设计特殊的加载构造，避免针对大刚度构件的直接加载，另一方面采用特殊的加载模式，避免对大刚度构件的位移加载。2009年中国地震局工程力学研究所、日本京都大学、美国纽约州立大学 Buffalo 分校联合进行了钢结构框架的子结构混合试验^[56]，试验子结构为首层三个柱子，重点研究首层薄弱现象和塑性内力转移机制，考虑到柱上下端均会进入严重的屈服和屈曲，必须对柱子进行水平、竖向和转动三个平面内自由度的位移控制，如图9(a)所示。与水平自由度相比，柱子竖向和转动刚度很大，难以直接进行位移控制加载，研究中采用了基于重叠领域概念的柔性加载方法，即将试验子结构增加半层到第二层的反弯点位置，然后利用反弯点处的水平位移和首层的水平位移，以及与数值子结构部分相同的梁、柱构件控制首层柱端的转动位移，这样就避免了直接针对转动的控制。第二层结构的响应完全由数值子结构得到，避免了反弯点假设引起的较大的局部应力和应变误差^[57]。同时对于竖向自由度，采用力控制加载，其目标值来自于数值子结构对应自由度的边界反力，这样在一个系统中既有位移控制模式又有力控制模式，形成了力-位移混合控制加载的第一种方式。这种方式也可用于多层结构按照一定力比例模式的推覆加载。在文献^[58]中，Pan 等针对某些构件受压刚度大而受拉刚度小提出了第二种力-位移切换控制模式，研究了

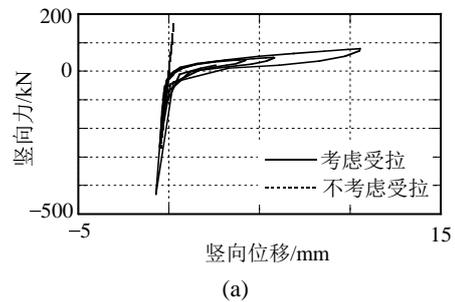
隔震结构在竖向地震动下的地震响应，利用力-位移切换方法进行了混合试验研究，结果表明所提出的力-位移切换模式可以很好的模拟隔震结构在竖向地震作用下的响应，受拉和受压行为有明显不同，不考虑力-位移切换控制的地震响应位移明显偏小，如图10。



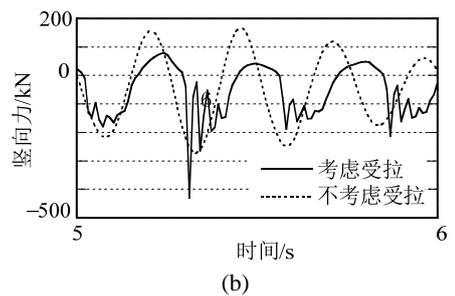
(a) 子结构边界自由度 (b) 采用重叠领域后的加载方案

图9 采用重叠领域的柔性加载制度^[56]

Fig.9 Flexible loading scheme by use of over-lapping domain method^[56]



(a)



(b)

图10 叠层橡胶支座在竖向地震作用下的响应^[58]

Fig.10 Responses of laminated rubber bearings under vertical ground motions^[58]

4 三代子结构混合试验平台及应用

为了实际应用于子结构混合试验技术，最重要的是开发一个可扩展的、兼容性好的混合试验平台。本研究团队在过去15年间，开发了三代混合试验系统，即主从式、动静分离式和对等多子结构试验

系统。

4.1 主从式子结构混合试验平台

主从式子结构混合试验平台以有限元软件为核心，将试验子结构看作试验单元，试验子结构的刚度和恢复力将被集成到有限元软件的整体刚度矩阵中，用于求解整体结构位移，如图 11。Pan 等^[52]提出的基于网络的子结构混合试验系统，分析与试验分别在两个地方进行，而通过互联网进行数据交换。由于采用的有限元软件使用隐式迭代方法和增量描述处理结构非线性问题，开发了智能刚度预测方法，从而将试验子结构无缝链接到有限元软件中。利用主从式混合试验平台，作者将隔震层作为试验子结构放在日本京都大学进行试验，而将上部结构作为数值子结构放在日本大阪大学进行有限元分析，验证了所研发的网络数据传递的稳定性和智能刚度预测技术的有效性，准确再现了隔震结构在水平向和竖向地震动下的响应。

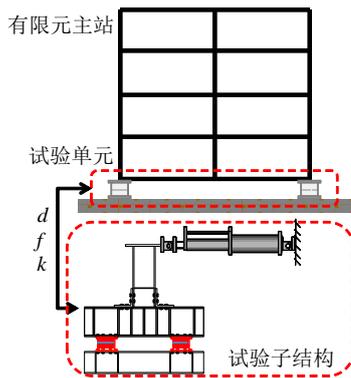


图 11 主从式子结构混合试验平台^[52]

Fig.11 Server-client framework for substructure online hybrid test^[52]

4.2 动静分离式子结构混合试验平台

动静分离式子结构混合试验平台即在协调器中求解整体结构的动力方程，而恢复力由数值子结构和试验子结构得到，这时数值子结构和试验子结构均为静力子结构，如图 12 所示。这种平台适合于动力简单而静力复杂的工程结构，比如支撑框架结构，整体动力模型可简化为多质点模型，而静力需要考虑支撑的整体屈曲，十分复杂，可以采用试验模拟，而框架部分行为比较简单，可采用数值模拟实现。利用动静分离式混合试验平台，作者完成了隔震结构与周边挡土墙碰撞的子结构混合试验^[42]，在试验中，上部结构采用 ABAQUS 进行模拟，而隔震层与挡土墙采用试验进行，整体结构动力模型为 9 质点模型，试验再现了隔震层碰撞发生后，上

部结构地震响应迅速增大并进入塑性的全过程。数值子结构采用了 ABAQUS 的重启动功能，避免了对有限元代码的修改，更加易于移植和应用。2012 年，利用该平台完成了 18 层框架-剪力墙结构混合试验研究^[59]，将动力自由度简化为 6 个，每三层一个，框架部分作为第一个数值子结构，剪力墙下部 6 层作为试验子结构，剪力墙上部 12 层作为第二个数值子结构。两个剪力墙子结构竖向边界采用千斤顶模拟倾覆力矩造成的轴力变化，其目标值由上部剪力墙数值子结构提供。试验准确再现了框架剪力墙结构连梁、剪力墙和框架的失效模式。

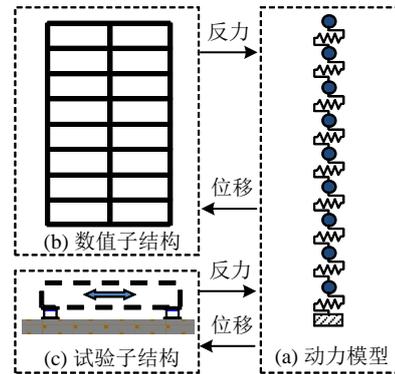


图 12 动静分离式子结构混合试验平台^[42]

Fig.12 Separated model framework for substructure online hybrid test^[42]

4.3 对等多子结构混合试验平台

对等多子结构混合试验平台是一种全新的混合试验系统^[53]，如图 13。各个子结构被作为平等的对象进行处理，或者进行数值模拟，或者采用试验方法，每个子结构都是动力系统，动力方程只在子结构层次上形成，而不形成整体的动力方程。为了保证边界的协调和平衡条件，每个子结构将自身的动力特性凝聚到边界上，通过边界上的位移和不平衡力增量，采用拟牛顿法逐步生成边界上的等效静

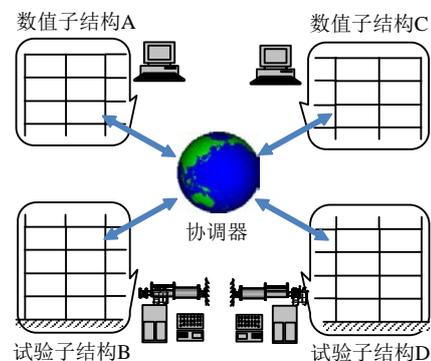


图 13 对等多子结构混合试验系统^[53]

Fig.13 Peer-to-peer framework for substructure online hybrid test^[53]

力平衡方程进行求解。系统采用预测-加载-修正方案避免对试验子结构的迭代。多种结构的验证试验表明该方法可以适用于复杂结构的地震响应模拟,并可以协调多个数值子结构和试验子结构^[43,60]。2010年,为了再现日本 E-Defense 振动台上四层足尺钢结构框架的倒塌全过程^[61],采用图 9 所示的重叠领域柔性控制技术进行了子结构混合试验研究^[56],将试验子结构划分为两部分分别在日本和美国进行试验,上部结构采用 OpenSees 有限元进行模拟,三个子结构之间的协调条件由对等多子结构平台的协调器完成。通过与振动台试验结果对比,尽管混合试验模型做了很多简化,仍然可以得到与振动台试验类似的地震响应和倒塌机制。

5 总结与展望

本文回顾了子结构混合试验发展历程,按照加载速度和关注的科学问题分为分布式子结构混合试验系统和快速实时子结构混合试验系统。本文针对分布式子结构混合试验进行总结归纳,认为分布式子结构混合试验的核心科学问题在于高效稳定的时间直接积分方法、隐式数值域与显式试验域的协同理论、复杂边界条件的计算和实现,最终立足于可扩展的子结构混合试验平台。本文系统总结了过去 15 年针对这些问题的研究和成果,认为:

(1) 适合于子结构混合试验的时间直接积分算法应该具备显式且无条件稳定的特征,这些算法可由隐式算法在一定假定条件下的求解而得到,但假定条件引入的误差需要专门分析;

(2) 隐式数值域的求解过程是基于增量描述的迭代过程,这与显式试验域基于全量加载、不可迭代的本质是矛盾的,为此需要设计专门的求解策略,避免对试验子结构的迭代,比如预测-加载-修正三段式的求解方案,或者需要准确的预测试验子结构边界刚度的方法,以便于将试验子结构嵌入数值分析中去;

(3) 子结构混合试验能够成功的关键在于边界条件的求解和实现,拟牛顿过程是系统的寻找子结构之间边界条件的方法,它仅需要边界上有限的信息,即可完成刚度更新和边界位移求解过程。在加载系统中,放松某些次要自由度,间接控制某些大刚度自由度,直接控制对响应影响最大的变形,形成柔性的加载制度,可在精度损失有限的情况下,大幅度提高试验系统的可靠性;

(4) 封装和并行是现代系统平台的主要特征,采用标准接口处理各类子结构,采用星状拓扑结构兼容各类软件和硬件,将使得子结构混合试验系统具有更好的兼容性、适用性和可移植性。

子结构混合试验技术逐渐成熟并得到越来越多的认可和应用,但地震工程的发展也对子结构混合试验技术提出了更多的要求。边界加载采用柔性的技术固然增强了子结构混合试验的适用性,但也引入了较大的误差,而现有混合试验所采用的加载设备对于非控制专业的用户而言很难进行拼装组合以实现单点多自由度的协同加载,为此需要发展新型的加载设备,完成空间多自由度的协同控制。另外地震作用往往引发多种次生灾害,比如场地问题、海啸问题等,对现代重大工程形成了多重致灾源,如何利用子结构混合试验再现如此复杂动力失效过程,对此我们应该开展可协同多种物理域的子结构协调方法^[62]、非线性自适应控制技术^[63]、多元动力平台的协同方法等方面的研究,这是下一代子结构混合试验的关键问题。

参考文献:

- [1] 伯野元彦, 四俣正俊, 原司. 計算機により制御された, はりの動的破壊実験[J]. 日本土木学会論文報告集, 1969, 171(11): 1-8.
Hakuno M, Shidawara M, Hara T. Dynamic destructive test of a cantilever beam controlled by an analog-computer [C]// Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, Japan Society of Civil Engineers, 1969, 1969(171): 1-8. (in Japanese)
- [2] 高梨晃一, 宇田川邦明, 関松太郎, 等. 電算機-試験機オンラインシステムによる構造物の非線形地震応答解析: その 1: システムの内容[J]. 日本建築学会論文報告集, 1975(229): 77-84.
Takanashi K, Udagawa K, Seki M, et al. Non-linear earthquake response analysis of structures by a computer-actuator on-line system (part 1 detail of the system) [J]. Transcript of the Architectural Institute of Japan, 1975(229): 77-84. (in Japanese)
- [3] Mahin S A, Shing P B. Pseudodynamic method for seismic testing [J]. Journal of Structural Engineering, 1985, 111(7): 1482-1503.
- [4] Shing P B, Nakashima M, Bursi O S. Application of PSD test method to structural research [J]. Earthquake Spectra 1996, 12(1): 29-56.
- [5] Pegon P, Ruiz F J M, Magonette G. Continuous pseudo-dynamic testing at ELSA [M]// Hybrid Simulation Theory, Implementation and Applications, 2008.

- [6] Nakashima M. Part I: Relationship between integration time interval and response stability in pseudo dynamic testing [J]. *Journal of Structural and Construction Engineering*, 1985, 353: 29–36.
- [7] Chang, S Y. Explicit pseudo dynamic algorithm with unconditional stability [J]. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 2002, 128(9): 935–947.
- [8] Chang S Y. Improved numerical dissipation for explicit methods in pseudo dynamic tests [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1997, 26(9): 917–929.
- [9] Nakashima M, Kaminosono T, Ishida M, et al. Integration techniques for substructure pseudodynamic test [C]. *Proceedings of 4th U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, Palm Springs, CA, 1990, 2: 515–524.
- [10] Combescure D, Pegon P. α -operator splitting time integration technique for pseudodynamic testing Error propagation analysis [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1997, 16(7/8): 427–443.
- [11] Jung R Y, Shing P B. Performance evaluation of a real-time pseudodynamic test system [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2006, 35(7): 789–810.
- [12] Nakashima M, Kato H, Takaoka E. Development of real-time pseudo dynamic testing [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, 21(1): 79–92.
- [13] Nakashima M, Masaoka N. Real-time on-line test for MODF systems [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1999, 28(4): 393–420.
- [14] Phillips B M, Spencer B F. Model-based feedforward-feedback actuator control for real-time hybrid simulation [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2013, 139(7): 1205–1214.
- [15] Phillips B M, Spencer B F. Model-based multiactuator control for real-time hybrid simulation [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2013, 139(2): 219–228.
- [16] Wu B, Wang Q, Shing P B, et al. Equivalent force control method for generalized real-time substructure testing with implicit integration [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2007, 36(9): 1127–1149.
- [17] Chen C, Ricles J M. Development of direct integration algorithms for structural dynamics using discrete control theory [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, 134(8): 676–683.
- [18] Ou G, Ozdagli A I, Dyke S J, et al. Robust integrated actuator control: experimental verification and real time hybrid simulation implementation [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2015, 44(3): 441–460.
- [19] Horiuchi T, Inoue M, Konno T, et al. Real-time hybrid experimental system with actuator delay compensation and its application to a piping system with energy absorber [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1999, 28(10): 1121–1141.
- [20] Wallace M I, Wagg D J, Neild S A. An adaptive polynomial based forward prediction algorithm for multi-actuator real-time dynamic substructuring [J]. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, 2005, 461(2064): 3807–3826.
- [21] Ahmadzadeh M, Mosqueda G, Reinhorn A M. Compensation of actuator delay and dynamics for real-time hybrid structural simulation [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2008, 37(1): 21–42.
- [22] Carrion J E, Spencer Jr B F. Real-time hybrid testing using model-based delay compensation [J]. *Smart Structures and Systems*, 2008, 4(6): 809–828.
- [23] Wu B, Wang Z, Bursi O S. Actuator dynamics compensation based on upper bound delay for real-time hybrid simulation [J]. *Computational Mechanics*, 2012, 42(12): 1749–1765.
- [24] Chen C, Ricles J M, Guo T. Improved adaptive inverse compensation technique for real-time hybrid simulation [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, 138(12): 1432–1446.
- [25] Wang X, Tian S, Zhang H, et al. Hybrid testing method on substructure techniques for shaking table by position control of actuator [J]. *World Earthquake Engineering*, 2009, 25(2): 30–35.
- [26] Neild S, Stoten D, Drury D, et al. Control issues relating to real-time substructuring experiments using a shaking table [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2005, 34(9): 1171–1192.
- [27] Nakata N. Acceleration trajectory tracking control for earthquake simulators [J]. *Engineering Structures*, 2010, 32(8): 2229–2236.
- [28] Günay S, Mosalam K M. Enhancement of real-time hybrid simulation on a shaking table configuration with implementation of an advanced control method [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2015, 44(5): 657–675.
- [29] Sivaselvan M V, Reinhorn A M, Shao X, et al. Dynamic force control with hydraulic actuators using added compliance and displacement compensation [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2008, 37(15): 1785–1800.
- [30] Zhou Mengxia, Wang Jinting, Jin Feng, et al. Real-time dynamic hybrid testing coupling finite element and shaking table [J]. *Journal of Earthquake Engineering*, 2014, 18(4): 637–653
- [31] Dermizakis S N, Mahin S A. Development of substructuring techniques for online computer controlled seismic performance testing [R]. Report No. UCB/EERC-85/04, Earthquake Engineering Research

- Center, University of California, Berkeley, CA, 1985.
- [32] Nakashima M, Ishii K, Kamagata S, et al. Feasibility of pseudo dynamic test using substructuring techniques [C]. Proceedings of 9th World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, 1988, 4: 47—52.
- [33] Buckle I, Reitherman R. The Consortium for The George E. Brown J. Network for Earthquake Engineering Simulation [C]. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, Canada, Paper No. 4016, 2004.
- [34] Stojadinovic B, Mosqueda G, Mahin A S. Event-driven control system for geographically distributed hybrid simulation [J]. Journal of Structural Engineering, 2006, 132(1): 68—77.
- [35] Kim S J, Phillips B M, Christenson R E, et al. Geographically distributed real-time hybrid simulation of a MR damper controlled building model [C]. 2011 Engineering Mechanics Institute Annual Conference, Boston, MA, 2011.
- [36] Kwon O S, Elnashai A S, Spencer B F. A framework for distributed analytical and hybrid simulations [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2008, 30(3): 331—350.
- [37] Pinto A V, Pegon P, Magonette G, et al. Pseudo-dynamic testing of bridges using non-linear substructuring [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2004, 33(11): 1125—1146.
- [38] Watanabe E, Sugiura K, Nagata K, et al. Multi-phase interaction testing system by means of the internet [C]. 1st International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics, Seoul, Korea, 1999: 43—54.
- [39] Yang Y S, Wang K J, Wang S J, et al. Networked pseudo-dynamic testing Part I: Database approach [C]. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Aug. Vancouver, Canada, 2004.
- [40] 郭玉荣, 张国伟, 肖岩, 等. 单自由度结构远程分析及拟动力试验平台[J]. 湖南大学学报, 2006, 33(2): 18—21.
Guo Yurong, Zhang Guowei, Xiao Yan, et al. A platform for remote analysis and pseudo dynamic testing of SDOF structures [J]. Journal of Hunan University, 2006, 33(2): 18—21. (in Chinese)
- [41] 王大鹏, 田石柱, 蔡新江. 网络化协同结构拟动力试验方法与技术[J]. 应用基础与工程科学学报, 2010, 18(6): 910—921.
Wang Dapeng, Tian Shizhu, Cai Xinjiang. Networked collaborative structural pseudo-dynamic testing method and technology [J]. Basic Science and Engineering, 2010, 18(6): 910—921. (in Chinese)
- [42] Wang T, Pan P, Nakashima M. On-line hybrid test combining with general-purpose finite element software [J]. Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006, 35(12): 1471—1488.
- [43] Wang T, Yoshitake N, Pan P, et al. Numerical characteristics of peer-to-peer (P2P) Internet online hybrid test system and its application to seismic simulation of SRC structure [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2008, 37(2): 265—282.
- [44] Takahashi Y, Fenves G L. Software framework for distributed experimental-computational simulation of structural systems [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006, 35(3): 267—291.
- [45] Zhou H M, Li M N, Wang T. Force-displacement decoupled control of engineering structures with multi-degree-of-freedom testing [C]. Proceedings of the Fourteenth International Symposium on Structural Engineering, Beijing: Science Press, 2016: 458—463.
- [46] Pan P, Wang T, Nakashima M. Development of online hybrid testing: Theory and applications to structural engineering [M]. Butterworth-Heinemann, 2015.
- [47] Belytschko T, Hughes T J R. Computational methods for transient analysis, Vol.1 Computational methods in mechanics [M]. Elsevier Science B.V., Amsterdam, Netherlands, 2001.
- [48] Bathe K J, Wilson E L. Stability and accuracy analysis of direct integration methods [J]. Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1973, 1(3): 283—291.
- [49] Gui Y, Wang J T, Jin F, Chen C, Zhou M X. Development of a family of explicit algorithms for structural dynamics with unconditional stability [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(4): 1157—1170.
- [50] Hilber H M, Hughes T J R, Taylor R L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1977, 5(3): 283—292.
- [51] 冉田苒, 王涛, 周惠蒙, 等. 一种无条件稳定的显式数值积分方法[J]. 防灾减灾工程学报, 2016, 36(1): 50—54.
Ran Tianran, Wang Tao, Zhou Huimeng, et al. An explicit algorithm with unconditional stability for pseudo-dynamic testing [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2016, 36(1): 50—54. (in Chinese)
- [52] Pan P, Tada M, Nakashima M. Online hybrid test by internet linkage of distributed test-analysis domains [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2005, 34(11): 1407—1425.
- [53] Pan P, Tomofuji H, Wang T, et al. Development of peer-to-peer (P2P) Internet online hybrid test system [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006, 35(7): 867—890.
- [54] Wang T, Cheng C, Guo X. Model-based predicting and correcting algorithms for substructure online hybrid tests [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2012, 41(15): 2331—2349.

- [55] Nakashima M, Akazawa T, Igarashi H. Pseudo-dynamic testing using conventional testing devices [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1995, 24(10): 1409—1422.
- [56] Wang Tao, Gilberto Mosqueda, Andres Jacobsen, et al. Performance evaluation of a distributed hybrid test framework to reproduce the collapse behavior of a structure [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2012, 41(2): 295—313.
- [57] Schneider P S, Roeder W C. An inelastic substructure technique for the pseudo-dynamic test method [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1994, 23(7): 761—775.
- [58] Pan P, Nakashima M, Tomofuji H. Online test using displacement-force mixed control [J]. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 2005, 34(8): 869—888.
- [59] 王涛, 孔子昂, 毛晨曦. 高层框架剪力墙结构子结构混合试验研究[C]. 贵阳: 第十五届高层建筑抗震技术交流会, 2015.
Wang Tao, Kong Zi'ang, Mao Chenxi. Substructural online hybrid test on a high-rise frame wall structure [C]. *Proceedings of 15th Workshop on Aseismic Technologies of High-Rise Structures*, Guiyang, China, 2015. (in Chinese)
- [60] Wang T, McCormick J, Yoshitake N, et al. Collapse simulation of a four-story steel moment frame by a distributed online hybrid test [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2008, 37(6): 955—974.
- [61] Suita K, Yamada S, Tada M, et al. Results of recent E-Defense tests on full-scale steel buildings: part 1—Collapse experiments on 4-story moment frames [C]. *Structures Congress 2008: Crossing Borders*, 2008: 1—10.
- [62] 江浩然, 王涛, 周惠蒙, 罗清宇. 基于界面单元的子结构协调技术[J]. *工程力学*, 2017, 34(1): 171—179.
Jiang Haoran, Wang Tao, Zhou Huimeng, Luo Qingyu. A method to coordinate substructures based on interface elements [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, 34(1): 171—179. (in Chinese)
- [63] 周惠蒙, 吴斌, 王涛, David Wagg, 戴君武. 基于速度的显式等效力控制方法的研究[J]. *工程力学*, 2016, 33(6): 15—22, 33.
Zhou Huimeng, Wu Bin, Wang Tao, David Wagg, Dai Junwu. Explicit equivalent force control method based on velocity [J]. *Engineering Mechanics*, 2016, 33(6): 15—22, 33. (in Chinese)

注: 该文在第 26 届结构工程学术会议(2017 长沙)应邀作特邀报告