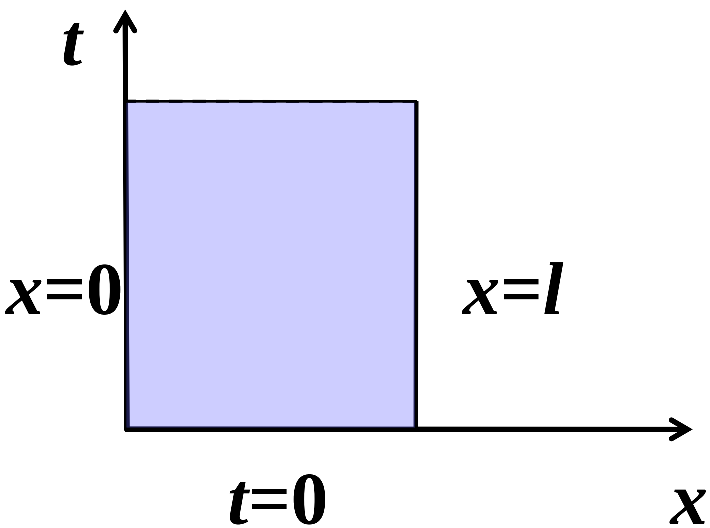
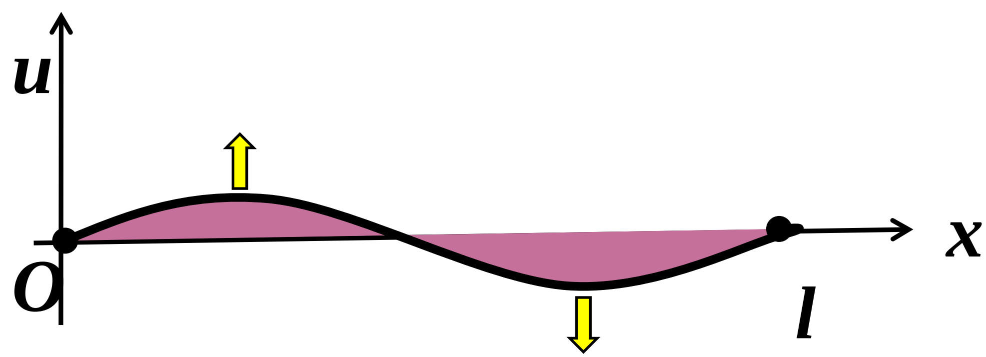
第四讲：齐次弦振动方程初–变值问题（分离变量法）

基本思想：将一个线性偏微化成两个线性常微，再用叠加原理构造Four ier级数解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > 0 & (1) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & (2) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) & (3) \end{cases}$$





令$u(x,t)=X(x)T(t)$[不恒为零]带入方程(1)：

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\triangleq -\lambda$$ (待定常数)

进而得

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (4)$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (5)$$

再根据边界条件$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$,

$\forall t>0,\ X(0)\equiv X(l)\equiv 0.$

考虑特征值问题：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & (5) \\ X(0)\equiv X(l)\equiv 0 & (6) \end{cases}$$

令$X(x)=Ce^{\mu x}$代入二阶线性常微分方程(5)

得相应的特征方程 $\mu^2+\lambda=0$

$$\mu_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$$

分情况讨论：

情况1: $\lambda<0$,

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

要满足边条件(6)只有$C_1=C_2=0$ （舍去）。

情况2： $\lambda=0$,

$$X(x)=C_1+C_2x$$

要满足边条件(6)只有$C_1=C_2=0$ （舍去）。

情况3： $\lambda>0$,

$$X(x)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

代入边条件(6)：

$$\begin{cases}0=X(0)=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0\\ 0=X(l)=C_1\cos(\sqrt{\lambda}l)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}l)\end{cases}\Rightarrow C_1=0$$

为使$C_2 \neq 0$,只有

$$\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l=k\pi, \quad k=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow \lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k=1,2,\cdots \qquad (7)$$

特征值

$$X_k(x)=C_k^*\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad (8)$$

特征函数

将$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$代入(4)得

$$T''(t) + a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

$$\Rightarrow T_k(t) = M_k\cos\left(\frac{k\pi a}{l}t\right) + N_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}t\right) \quad (9)$$

由叠加原理，

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)+B_k\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\quad(10)$$

其中$A_k=C_k^*M_k, B_k=C_k^*N_k$

系数（无穷多个）如何求？

【利用初始条件】

利用正弦、余弦函数在积分意义下的正交性：

$$\int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \frac{l}{2}, & k = m \end{cases}$$

$$\because \varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$\therefore \int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx$$

$$= A_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \frac{l}{2}A_m$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

同样可得

$$B_m = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

将$m \to k$即可.

物理含义:

$$U_k(x,t)=\left[A_k\cos\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)+B_k\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$=\underbrace{N_k}_{\text{振幅}}\cdot\cos(\underbrace{\omega_k}_{\text{频率}}t+\underbrace{\theta_k}_{\text{初相位}})\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$$

主频: $\omega_1=\frac{\pi a}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ [依赖于密度、弦长和张力]

可解释男子与女子声音的差别

谢谢！