第61卷第1期 数学学报中文版 Vol.61, No.1
2018年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)01-0001-18 **文献标识码:** A

三维广义磁流体方程组解的最优衰减率

南志杰

北京航空航天大学数学与系统科学学院 北京 100194
嘉兴学院南湖学院数理与信息工程系 嘉兴 314001
E-mail: nanzhijie@163.com

吴　刚

中国科学院大学数学科学学院 北京 100190
E-mail: wugangmaths@gmail.com

摘　要　本文利用 Fourier 分解法首次建立了三维广义磁流体动力学方程组弱解的时间衰减估计, 得到了该方程解关于时间衰减的上下界估计, 并且获得了相应的最优代数衰减率.

关键词　广义磁流体方程组; Fourier 分解法; 最优衰减率
MR(2010) 主题分类　35Q35, 35B40, 76W05
中图分类　O175.2

Optimal Decay Estimates of Solutions to the Three-dimensional Generalized MHD Equations

Zhi Jie NAN

School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing 100194*, P. R. China*
Department of Mathematics, Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001*, P. R. China*
E-mail: *nanzhijie@163.com*

Gang WU

School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190*, P. R. China*
E-mail: *wugangmaths@gmail.com*

Abstract　We use Fourier-splitting method to establish the temporal decay estimates for weak solutions to the 3D generalized magneto-hydrodynamics equations firstly. We

收稿日期: 2016-12-06; 接受日期: 2017-04-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11101405); 浙江省教育厅科研项目 (Y201330036)

obtain not only the upper bounds estimates but also the lower bounds estimates of time decay for the solutions of these equations, moreover, the corresponding optimal algebraic time decay rates are found.

Keywords GMHD equations; Fourier-splitting method; optimal decay rates
MR(2010) Subject Classification 35Q35, 35B40, 76W05
Chinese Library Classification O175.2

1 引言

不可压磁流体 (MHD) 方程组被表示为如下的数学模型

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u\cdot\nabla u - b\cdot\nabla b + \nabla p = 0, \\ \partial_t b - \Delta b + u\cdot\nabla b - b\cdot\nabla u = 0, \\ \nabla\cdot u = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^d$, $d\geq 2$, 时间 $t>0$, 而

$$u = u(x,t), \quad p = p(x,t), \quad b = b(x,t)$$

分别表示流场速度, 压力以及磁场.

当磁场 $b=0$ 时, MHD 系统就退化为被广泛研究的 Navier–Stokes (NS) 方程组. 因为 (1.1) 的前两个方程是类似的, 所以 MHD 方程组的研究与 NS 方程组的研究密切相关. 我们首先回顾一下关于 NS 方程组的若干已知结果. Leray 在著名的文章 [3] 中证明了只要初值属于 L^2, NS 方程组就具有整体弱解. 然而, 除了二维的情形, 整体弱解是否是正则的仍然是一个公开问题. 在文中, 他也提出了这样一个问题: “当时间趋于无穷时, NS 方程组的弱解在 L^2 中是否收敛到零?” 对于小初值的温和解, Kato [2] 首次给出了该问题的正面回答. 随后, Schonbek [6, 7] 发明了 Fourier 分解法, 并利用它得到了三维 NS 方程组的大初值弱解在 $L^p\cap L^2$ $(1\leq p<2)$ 中满足如下的衰减关系:

$$\|u(t)\|_2 \leq C(t+1)^{-\frac{3}{4}(\frac{2}{p}-1)}.$$

因为这个代数衰减率与热方程是一致的, 所以不可能再被改进了. 然而下界估计要复杂得多, 对于 NS 方程, Schonbek 在文 [7, 8] 中首次研究了这个问题. 在这些工作之后, 她的方法被应用于 MHD 方程 [9], 并得到了相似的结果.

另一方面, 基于数学理论研究的需要, 分数次耗散的流体方程开始被广泛研究. 酒全森和于幻在文 [1] 中证明了三维分数次 NS 方程弱解的衰减率与相应的热方程是一致的.

本文将研究如下的三维广义磁流体 (GMHD) 方程组的总能量 (动能加磁能) 的时间衰减率

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^\alpha u + u\cdot\nabla u - b\cdot\nabla b + \nabla p = 0, \\ \partial_t b + (-\Delta)^\beta b + u\cdot\nabla b - b\cdot\nabla u = 0, \\ \nabla\cdot u = 0, \quad \nabla\cdot b = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad b(x,0) = b_0(x), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^3$ 时, 时间 $t>0$, $u=u(x,t)$, $p=p(x,t)$ 和 $b=b(x,t)$ 分别表示流体速度, 压力和磁场.

根据不可压条件 $\nabla\cdot u=\nabla\cdot b=0$, 得到如下能量不等式:

$$
\begin{aligned}
E(u,b)(t) &= E(u)(t)+E(b)(t)\\
&\triangleq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2\,dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\left|\Lambda^\alpha u(x,\tau)\right|^2dxd\tau\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|b(x,t)|^2\,dx+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\left|\Lambda^\beta b(x,\tau)\right|^2dxd\tau\\
&\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|u_0(x)|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|b_0(x)|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

经典的结果是: 当 $\alpha\ge\frac{5}{4}$, $\beta\ge\frac{5}{4}$ 时, GMHD 方程组 (1.2) 具有唯一的整体正则解 [12]. 然而, 当 $\alpha,\beta<\frac{5}{4}$, GMHD 方程组的整体适定性仍然是一个公开问题.

本文研究当 $\frac{3}{4}\le\alpha,\ \beta<\frac{5}{4}$ 时, GMHD 方程组 (1.2) 解的渐近行为. 基于文 [9], 将利用 Fourier 分解法得到解的上下界估计, 从而获得 GMHD 方程组解的最优衰减率. 下面陈述主要定理.

定理 1.1 设 $\frac{3}{4}\le\alpha,\ \beta<\frac{5}{4}$, (u,b) 是 GMHD 方程组 (1.2) 的一个弱解, 其初值 (u_0,b_0) 属于 $(L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\cap W_2)^2$, 这里 $W_2\triangleq\{v:\int_{\mathbb{R}^3}|x|\,|v(x)|^2dx<\infty\}$. 若 $\hat{u}_0$ 在原点具有 m 次零点, $\hat{b}_0$ 在原点具有 k 次零点 (见定义 2.1), 则存在正常数 C_0 和 C_1, 使得如下关系成立:

(1) 若 $m=0$ 或 $k=0$, 则

$$C_0(t+1)^{-\min\{\frac{3+2m}{2\alpha},\frac{3+2k}{2\beta}\}}\le\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2\le C_1(t+1)^{-\min\{\frac{3+2m}{2\alpha},\frac{3+2k}{2\beta}\}}.$$

(2) 若 $mk\neq 0$ 以及 $(u,b)\in\mathscr{M}^c$, 则

$$C_0(t+1)^{-\frac{5}{2\max\{\alpha,\beta\}}}\le\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2\le C_1(t+1)^{-\frac{5}{2\max\{\alpha,\beta\}}}.$$

集合 $\mathscr{M}$ 的定义在第 4 节中.

本文第 2 节建立分数次热方程解的衰减关系. 第 3 节给出了 GMHD 方程组解的上界估计. 第 4 节通过 GMHD 方程组与分数次热方程的相差方程的 Fourier 分析, 获得了 GMHD 方程组解的下界估计. 最后, GMHD 方程组弱解的存在性将在附录中给出证明.

除非特别说明, 在本文中空间维数都是三维. H^m 表示 m 次 Hilbert 空间, L^p 表示 Lebesgue 空间, 并赋予标准的范数 $\|\cdot\|_p$ $(1\le p\le\infty)$. L^2_σ 表示集合 $\{v\in C_0^\infty:\nabla\cdot v=0\}$ 在 L^2 中的闭包, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示空间的 L^2 内积以及 $\Lambda^{2\alpha}=(-\Delta)^\alpha$ 是通过 Fourier 变换来定义 [10]: $\widehat{\Lambda^{2\alpha}v}(\xi)=|\xi|^{2\alpha}\hat{v}(\xi)$. 我们将用到如下的加权空间:

$$W_1\triangleq\left\{v:\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2|v(x)|dx<\infty\right\},\quad W_2\triangleq\left\{v:\int_{\mathbb{R}^3}|x||v(x)|^2dx<\infty\right\}.$$

此外, C, C_i $(i=0,1)$ 表示无伤害的正常数, 它们的数值在同一不等式中可能会发生变化. $A\approx B$ 意味着 $C_0B\le A\le C_1B$.

2 分数次热方程解的衰减率

首先来研究分数次热方程:

$$\begin{cases} v_t+\Lambda^{2\alpha}v=0,\\ v(x,0)=u_0(x). \end{cases}\tag{2.1}$$

定义 2.1 设 $\psi \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$, m 是非负整数, 我们称 ψ 在原点具有 m 次零点是指: 在原点的某个领域 V 内, 如下等式成立:

$$\psi(\xi) = \mu(\xi) + h(\xi), \quad \forall \xi \in V.$$

这里 μ 是一个非零的 m 次齐次函数, 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 上连续, 并且存在 $\epsilon > 0$, 当 $\xi \to 0$ 时, 有 $h(\xi) = O(|\xi|^{m+\epsilon})$. 若 ψ 在原点具有 0 次零点, 记为 $\psi(0) \neq 0$.

方程组 (2.1) 解的衰减率可由如下引理给出.

引理 2.2 设 $v = v(x,t)$ 是 (2.1) 关于初值 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 的解. 设 $\hat{u}_0$ 在原点具有 $m \geq 0$ 次零点, 则存在仅依赖于 $\|u_0\|_2$ 的正常数 $C_0, C_1 > 0$, 使得对于任意时间 $t \geq 0$, 如下不等式成立:

$$C_0(t+1)^{-\frac{3+2m}{2\alpha}} \leq \|v(t)\|_2^2 \leq C_1(t+1)^{-\frac{3+2m}{2\alpha}}.$$

证明 选择一个 $\delta > 0$, 使得

$$\hat{u}_0(\xi) = \mu(\xi) + O(|\xi|^{m+\epsilon}), \quad \text{对于任意 } |\xi| \leq \delta, \tag{2.2}$$

这里 μ 是一个 m 次齐次函数以及 $\epsilon > 0$. 根据 Plancherel 定理, 有

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_2^2 &= \int_{|\xi|\geq\delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}} d\xi + \int_{|\xi|\leq\delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}} d\xi \\ &\triangleq h_\delta(t) + l_\delta(t).\end{aligned}$$

因为

$$h_\delta(t) \leq \mathrm{e}^{-2t\delta^{2\alpha}} \int_{|\xi|\geq\delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq \mathrm{e}^{-2t\delta^{2\alpha}} \|u_0\|_2^2$$

按指数方式衰减到零, 我们只要证明 $l_\delta(t)$ 是按给定的代数衰减率衰减即可. 利用 (2.2) 得到

$$\begin{aligned}l_\delta(t) &= \int_{|\xi|\leq\delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}} d\xi \approx \int_{|\xi|\leq\delta} |\mu(\xi)|^2 \mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}} d\xi \\ &\approx \int_{|\xi|\leq\delta} |\xi|^{2m} \mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}} d\xi \approx t^{-\frac{3+2m}{2\alpha}}.\end{aligned}$$

因此, 获得下界估计

$$l_\delta(t) \geq C_0 t^{-\frac{3+2m}{2\alpha}} \geq C_0(t+1)^{-\frac{3+2m}{2\alpha}}. \tag{2.3}$$

对于上界估计, 首先有

$$l_\delta(t) \leq C_1 t^{-\frac{3+2m}{2\alpha}} = C_1(2t)^{-\frac{3+2m}{2\alpha}} \leq C_1(t+1)^{-\frac{3+2m}{2\alpha}}, \quad t \geq 1.$$

另一方面, 通过三角不等式, 对于 $0 \leq t < 1$,

$$l_\delta(t) \leq \|v(t)\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 \leq C_1\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{3+2m}{2\alpha}}.$$

所以推出

$$l_\delta(t) \leq C_1(t+1)^{-\frac{3+2m}{2\alpha}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$

结合 (2.3) 和 (2.4), 完成了引理的证明.

为了研究 GMHD 方程组解的衰减率, 需要得到如下的分数次混合热系统解的时间衰减关系:

$$\begin{cases} v_t + \Lambda^{2\alpha} v = 0, \\ w_t + \Lambda^{2\beta} w = 0, \\ v(x,0) = u_0(x), \quad w(x,0) = b_0(x). \end{cases} \tag{2.5}$$

事实上, 如下的推论是引理 2.2 的直接推论.

推论 2.3 设 (v,w) 是方程组 (2.5) 的解, 其初值 (u_0,b_0) 属于 $L^2(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)$. 若 $\hat{u}_0$ 和 $\hat{b}_0$ 在原点分别具有 m 次、k 次零点, 则存在仅依赖于 $\|u_0\|_2$ 和 $\|b_0\|_2$ 的正常数 M_0,M_1, 对于任意的 $t\geq 0$, 都有

$$M_0(t+1)^{-\theta}\leq \|v(t)\|_2^2+\|w(t)\|_2^2\leq M_1(t+1)^{-\theta}. \tag{2.6}$$

这里

$$\theta=\min\left\{\frac{3+2m}{2\alpha},\frac{3+2k}{2\beta}\right\}.$$

3 广义 MHD 方程组解的上界估计

在本文余下部分, (u,b) 表示 GMHD 方程组 (1.2) 的一个弱解. 引入总能量

$$E(t)=\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2, \tag{3.1}$$

将利用 Schonbek 在文 [5] 中发明的 Fourier 分解法来寻找其最优的衰减率. 我们的证明在某种意义上是非严格的, 因为在证明中, 对于时间弱可导的函数使用了通常的时间导数. 然而, 当在附录中建立了弱解的存在性后, 只要对于渐近解运用同样的方法就可以完善我们的证明. 因此, 弱解的衰减率与渐近解的衰减率是一致的.

记

$$\begin{aligned}H&=u\cdot\nabla u-b\cdot\nabla b+\nabla p,\\ K&=u\cdot\nabla b-b\cdot\nabla u,\end{aligned} \tag{3.2}$$

则 GMHD 方程组可写为

$$\partial_t u+\Lambda^{2\alpha}u+H=0,\quad \partial_t b+\Lambda^{2\beta}b+K=0.$$

根据 Duhamel 公式, 得到

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)&=\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\alpha}}\hat{u}_0(\xi)-\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}}\hat{H}(\xi,\tau)d\tau,\\ \hat{b}(\xi,t)&=\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\beta}}\hat{b}_0(\xi)-\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\beta}}\hat{K}(\xi,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{3.3}$$

现在给出两个有用的引理.

引理 3.1 设 (u,b) 为 (1.2) 的光滑解, $E(t)$, H 和 K 分别由 (3.1) 与 (3.2) 所定义, 则存在仅依赖于 $\|u_0\|_2$ 与 $\|b_0\|_2$ 的正常数 C, 使得

$$|\hat{H}(\xi,t)|\leq C|\xi|E(t),\quad |\hat{K}(\xi,t)|\leq C|\xi|E(t).$$

而且, 如下不等式成立:

$$|\hat{u}(\xi,t)|\leq C\left(|\hat{u}_0(\xi)|+\frac{1}{|\xi|^{2\alpha-1}}\right),\quad |\hat{b}(\xi,t)|\leq C\left(|\hat{b}_0(\xi)|+\frac{1}{|\xi|^{2\beta-1}}\right).$$

证明 由于 $\operatorname{div}u=\operatorname{div}b=0$, 对于 (1.2) 的第一个方程作用投影算子得到

$$p=\frac{\operatorname{div}\operatorname{div}(u\otimes u-b\otimes b)}{-\Delta},$$

因此

$$\hat{p}(\xi,t)=-\frac{1}{|\xi|^2}\sum_{k,j}\xi_k\xi_j(\widehat{u_ku_j}-\widehat{b_kb_j}).$$

由 Hausdorff–Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}|\hat{H}(\xi,t)|&\le|\widehat{u\cdot\nabla u}|+|\widehat{b\cdot\nabla b}|+|\widehat{\nabla p}|\le C|\xi|\sum_{k,j}(|\widehat{u_ku_j}|+|\widehat{b_kb_j}|)\\&\le C|\xi|\sum_{k,j}(\|u_ku_j\|_1+\|b_kb_j\|_1)\le C|\xi|(\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2)=C|\xi|E(t)\end{aligned}$$

与

$$|\hat{K}(\xi,t)|\le|\widehat{u\cdot\nabla b}|+|\widehat{b\cdot\nabla u}|\le C|\xi|\sum_{k,j}(|\widehat{u_kb_j}|+|\widehat{b_ku_j}|)\le C|\xi|E(t).$$

利用解的 L^2 有界性, 得到

$$\begin{aligned}|\hat{u}(\xi,t)|&\le|\hat{u}_0(\xi)|+\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}}|\hat{H}(\xi,\tau)|d\tau,\\&\le|\hat{u}_0(\xi)|+\frac{C}{|\xi|^{2\alpha-1}}E(0)(1-\mathrm{e}^{-|\xi|^{2\alpha}t})\\&\le C\left(|\hat{u}_0(\xi)|+\frac{1}{|\xi|^{2\alpha-1}}\right)\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}|\hat{b}(\xi,t)|&\le|\hat{b}_0(\xi)|+\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}}|\hat{K}(\xi,\tau)|d\tau,\\&\le|\hat{b}_0(\xi)|+\frac{C}{|\xi|^{2\beta-1}}E(0)(1-\mathrm{e}^{-|\xi|^{2\beta}t})\\&\le C\left(|\hat{b}_0(\xi)|+\frac{1}{|\xi|^{2\beta-1}}\right),\end{aligned}$$

这就完成了证明.

引理 3.2 设 $v(x,t)$ 是热方程 (2.1) 的一个解, 其初值 u_0 属于 L^p, 则存在仅依赖于 $\|u_0\|_p$ 的正常数 C, 使得

$$\|D_x^sv(x,t)\|_q\le Ct^{-\frac{s}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},\quad\forall\,t>0,$$

这里 $s=0,1$, $1\le p\le q\le\infty$. 更进一步, 若 $p=2$ 且 $\hat{u}_0$ 在原点具有 m 次零点, 则有

$$\|\nabla v(x,t)\|_\infty\le C(t+1)^{-\frac{5}{4\alpha}-\frac{\theta}{2}},\quad\forall\,t\ge1,$$

这里 $\theta=\frac{3+2m}{2\alpha}$.

证明 记 $G_\alpha(x,t)$ 为分数次热核, 所以我们能将热方程的解表示为

$$v(x,t)=G_\alpha(x,t)*u_0(x).$$

根据 Young 不等式与标准的热核估计, 有

$$\|D_x^sv(x,t)\|_q\le C\|D_x^sG_\alpha(x,t)\|_r\|u_0\|_p\le C\|u_0\|_pt^{-\frac{s}{2\alpha}}\|G_\alpha(x,t)\|_r\le C\|u_0\|_pt^{-\frac{s}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},$$

这里 r 满足关系

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{q}.$$

另一方面, $v(x,t)$ 也能表示为

$$\nabla v(x,t)=\nabla G_\alpha(x,t/2)*v(x,t/2).$$

因此, 通过引理 2.2, 对于任意 $t\geq 1$, 得到

$$\begin{aligned}\|\nabla v(x,t)\|_\infty &\leq C\|\nabla G_\alpha(x,t/2)\|_2\|v(x,t/2)\|_2\leq Ct^{-\frac{5}{4\alpha}}(t+1)^{-\frac{3+2m}{4\alpha}}\\ &\leq C(t+1)^{-\frac{5}{4\alpha}-\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

上式中 $\theta=\frac{3+2m}{2\alpha}$. 证毕.

在这一节的余下部分, 用 (v,w) 来表示如下热系统的解:

$$\begin{cases}\partial_t v+(-\Delta)^\alpha v=0,\\ \partial_t w+(-\Delta)^\beta w=0,\\ \nabla\cdot v=0,\quad \nabla\cdot w=0,\\ v(x,0)=u_0(x),\quad w(x,0)=b_0(x).\end{cases}\tag{3.4}$$

命 $D=(D_1,D_2)=(u-v,b-w)$, 由 Duhamel 公式, 能推出

$$\hat{D}_1(\xi,t)=-\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}}\hat{H}(\xi,\tau)d\tau,\quad \hat{D}_2(\xi,t)=-\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\beta}}\hat{K}(\xi,\tau)d\tau.\tag{3.5}$$

现在, 将运用 Fourier 分解法来证明解的上界估计. 这可以被概括为 GMHD 方程与相应的热方程解的能量具有相同的衰减率而它们的相差部分 $D(t)$ 具有更快的衰减.

定理 3.3 设 $0<\alpha,\beta<\frac{5}{4}$. 若 (u,b) 是 GMHD 方程组 (1.2) 的一个解, 其初值 (u_0,b_0) 属于 $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\times L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$, (v,w) 是系统 (3.4) 相同初值的解, 并记 $D=(D_1,D_2)=(u-v,b-w)$ 为它们的差. 假设 $\hat{u}_0$ 在原点具有 m 次零点, $\hat{b}_0$ 在原点具有 k 次零点, 则存在仅依赖于初始总能量 $E(0)$ 的正常数 C, 式 (2.6) 中的 M_1 以及 $\theta=\min\{\frac{3+2m}{2\alpha},\frac{3+2k}{2\beta}\}$, 使得如下结论成立:

(1) 若 $m=0$ 或 $k=0$, 则对于任意 $t\geq 0$, 成立

$$E(t)=\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2\leq C(t+1)^{-\min\{\theta,\frac{5}{2\lambda}\}},\tag{3.6}$$

$$\|D(t)\|_2^2\leq C(t+1)^{-\min\{\theta+\epsilon_0,\frac{5}{2\lambda}\}},\tag{3.7}$$

这里 $\lambda\triangleq\max\{\alpha,\beta\}$, $\epsilon_0=\frac{5}{4\lambda}-1+\frac{\theta}{2}>0$.

(2) 若 $mk\neq 0$, 则对于任意 $t\geq 0$, 成立

$$E(t)=\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2\leq C(t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}},\tag{3.8}$$

$$\|D(t)\|_2^2\leq C(t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}}.\tag{3.9}$$

证明 首先, 相差部分 $D=(D_1,D_2)$ 满足如下系统:

$$\begin{cases}\partial_t D_1+(-\Delta)^\alpha D_1+H=0,\\ \partial_t D_2+(-\Delta)^\beta D_2+K=0,\\ \nabla\cdot D_1=0,\quad \nabla\cdot D_2=0,\\ D_1(0)=D_2(0)=0.\end{cases}\tag{3.10}$$

在前两个方程的两端分别关于 D_1 与 D_2 做 L^2 内积, 得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|D_1(t)\|_2^2&=-2\|\Lambda^\alpha D_1(t)\|_2^2-2\langle D_1,H\rangle,\\ \frac{d}{dt}\|D_2(t)\|_2^2&=-2\|\Lambda^\beta D_2(t)\|_2^2-2\langle D_2,K\rangle.\end{aligned}$$

把上面的等式相加并做分部积分, 则有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|D(t)\|_2^2 &= -2\|\Lambda^\alpha D_1(t)\|_2^2 - 2\|\Lambda^\beta D_2(t)\|_2^2 - 2\langle D_1, u\cdot\nabla v\rangle \\ &\quad + 2\langle D_1, b\cdot\nabla w\rangle - 2\langle D_2, u\cdot\nabla w\rangle + 2\langle D_2, b\cdot\nabla v\rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

利用 Hölder 不等式, 推出

$$\frac{d}{dt}\|D(t)\|_2^2 \le -2\|\Lambda^\alpha D_1(t)\|_2^2 - 2\|\Lambda^\beta D_2(t)\|_2^2 + 2\|D(t)\|_2 E(t)^{\frac12}(\|\nabla v\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty).$$

命 $g(t)\ge 0$ (待定) 以及 $G(t)=\mathrm{e}^{2\int_0^t g(s)ds}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(G(t)\|D(t)\|_2^2) &\le 2G(t)(g(t)\|D_1(t)\|_2^2 - \|\Lambda^\alpha D_1(t)\|_2^2) + 2G(t)(g(t)\|D_2(t)\|_2^2 - \|\Lambda^\beta D_2(t)\|_2^2) \\ &\quad + 2G(t)\|D(t)\|_2 E(t)^{\frac12}(\|\nabla v\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty) \\ &\triangleq \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由 Plancherel 定理, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= 2G(t)\int_{\mathbb{R}^3}(g(t)-|\xi|^{2\alpha})|\hat{D}_1(\xi,t)|^2 d\xi \\ &\le 2G(t)\int_{|\xi|^{2\alpha}\le g(t)}(g(t)-|\xi|^{2\alpha})|\hat{D}_1(\xi,t)|^2 d\xi \\ &\le 2G(t)g(t)\int_{|\xi|^{2\alpha}\le g(t)}|\hat{D}_1(\xi,t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

将引理 3.1 应用于 (3.5), 得到

$$\mathrm{I}_1 \le CG(t)g(t)^{1+\frac{5}{2\alpha}}\left(\int_0^t E(s)ds\right)^2. \tag{3.13}$$

同样地, 也能得到

$$\mathrm{I}_2 \le CG(t)g(t)^{1+\frac{5}{2\beta}}\left(\int_0^t E(s)ds\right)^2. \tag{3.14}$$

另一方面, 回顾 (3.11) 以及注意到 $\langle v, b\cdot\nabla w\rangle + \langle w, b\cdot\nabla v\rangle = 0$, 我们能按如下方式估计出 I_3:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3 &= G(t)(-2\langle u, u\cdot\nabla v\rangle + 2\langle u, b\cdot\nabla w\rangle - 2\langle b, u\cdot\nabla w\rangle + 2\langle b, b\cdot\nabla v\rangle) \\ &\le CG(t)E(t)(\|\nabla v\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty) \\ &\le CG(t)E(t)\big((t+1)^{-\frac{5}{4\alpha}-\frac{\theta}{2}} + (t+1)^{-\frac{5}{4\beta}-\frac{\theta}{2}}\big), \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中最后一个不等式是根据引理 3.2.

取 $g(t)=\frac{\gamma}{2(t+1)}$, 并将 (3.13), (3.15) 代入 (3.12), 我们发现

$$\frac{d}{dt}((1+t)^\gamma\|D(t)\|_2^2) \le C\left(\int_0^t E(s)ds\right)^2 (t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}-1+\gamma} + CE(t)(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}+\gamma-\frac{\theta}{2}}, \tag{3.16}$$

这里 γ 要取得充分大以保证最后一个不等式中 $t+1$ 的次方均为正的. 再从 1 到 t 积分 (3.16), 因为 $\int_0^t E(s)ds$ 是单增的, 得到

$$\|D(t)\|_2^2 \le C\left(\int_0^t E(s)ds\right)^2 (t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}} + C\int_0^t E(s)ds(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}} \tag{3.17}$$

对于任意的 $t \geq 1$ 成立. 另一方面, 由能量不等式可得 $\|D(t)\|_2^2$ 是有界的, 因此 (3.17) 对于任意的 $t \geq 0$ 仍成立, 这里 $C = C(E(0), M_1)$.

因为 γ 是充分大的, 推出

$$\begin{aligned}
E(t) &= \|u(t)\|_2^2 + \|b(t)\|_2^2 \\
&\leq 2\|v(t)\|_2^2 + 2\|w(t)\|_2^2 + 2\|D(t)\|_2^2 \\
&\leq 2M_1(t+1)^{-\theta} + C\left(\int_0^t E(s)ds\right)^2 (t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}} + C\int_0^t E(s)ds(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

现在, 我们声明

$$\int_0^t E(s)ds \leq C. \tag{3.19}$$

事实上, 因为 $E(t)$ 是有界的, 则有 $|\int_0^t E(s)ds| \leq Ct$, 所以由 (3.18) 可导出

$$E(t) \leq 2M_1(t+1)^{-\theta} + C\int_0^t E(s)ds\big((t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}+1} + (t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}}\big). \tag{3.20}$$

记

$$e(t) = \int_0^t E(s)ds, \quad Q(t) = (t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}+1} + (t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}},$$

则 (3.20) 可改写为

$$\frac{d}{dt}e(t) \leq 2M_1(t+1)^{-\theta} + Ce(t)Q(t).$$

运用 Gronwall 引理, 得到

$$e(t) \leq 2M_1\int_0^t (s+1)^{-\theta}ds\mathrm{e}^{C\int_0^t Q(s)ds}.$$

因为 $\lambda < \frac{5}{4}$ 以及 $\theta \geq \frac{3}{2\lambda} > \frac{6}{5}$, 容易得到 $\eta \triangleq \min\{\frac{5}{2\lambda} - 1, \frac{5}{4\lambda} + \frac{\theta}{2}\}$ 大于 1, 以及

$$\int_0^t Q(s)ds \leq C\int_0^t (s+1)^{-\eta}ds \leq \frac{C}{\eta - 1}.$$

因此, 获得了

$$\int_0^t E(s)ds = e(t) \leq C\int_0^t (s+1)^{-\theta}ds \leq C.$$

将 (3.19) 代入 (3.18) 中, 得到

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq C(M_1, E(0), \theta)\big((t+1)^{-\theta} + (t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}} + (t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}}\big) \\
&\leq C(M_1, E(0), \theta)(t+1)^{-\min\{\theta, \frac{5}{2\lambda}, \frac{5}{4\lambda}+\frac{\theta}{2}\}} \\
&= C(t+1)^{-\min\{\theta, \frac{5}{2\lambda}\}},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

于是 (3.6) 自然成立. 更进一步地, 若 $mk \neq 0$, 因为它们是正整数, 所以 $m, k \geq 1$. 因此

$$\theta = \min\left\{\frac{3+2m}{2\alpha}, \frac{3+2k}{2\beta}\right\} \geq \frac{5}{2\lambda},$$

这就保证了式 (3.8) 成立. 至此, 完成了 $E(t)$ 衰减率的证明.

接下来, 将回到 (3.12) 去寻找 I_3 的更好的估计来替代 (3.15). 事实上, 由如上 $E(t)$ 的估计, I_3 可被估计为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3 &= 2G(t)\|D(t)\|_2 E(t)^{\frac{1}{2}}(\|\nabla v\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty)\\ &\le C(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}-\min\{\theta,\frac{5}{2\lambda}\}+\gamma}. \end{aligned}\tag{3.22}$$

将 (3.13), (3.14) 和 (3.22) 代入 (3.12), 得到

$$\frac{d}{dt}((1+t)^\gamma\|D(t)\|_2^2) \le C(t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}-1+\gamma} + C(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}-\min\{\theta,\frac{5}{2\lambda}\}+\gamma},\tag{3.23}$$

这就蕴含了

$$\|D(t)\|_2^2 \le C(t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}} + C(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}-\min\{\theta,\frac{5}{2\lambda}\}+1}.\tag{3.24}$$

因为 (3.9) 显然成立, 下面将证明 (3.7). 这仅需考虑 $\theta < \frac{5}{2\lambda}$ 的情形, 由 (3.24) 得

$$\begin{aligned}\|D(t)\|_2^2 &\le C(t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}} + C(t+1)^{-\frac{5}{4\lambda}-\frac{\theta}{2}-\theta+1}\\ &= C(t+1)^{-\frac{5}{2\lambda}} + C(t+1)^{-(\frac{5}{4\lambda}-1+\frac{\theta}{2}+\theta)},\end{aligned}\tag{3.25}$$

这里 $\epsilon_0 = \frac{5}{4\lambda} - 1 + \frac{\theta}{2} > 0$, 这就证明了 (3.7).

4 Fourier 表示及下界估计

这一节将得到 GMHD 方程组解的 L^2 衰减的下界估计, 这样就完成了定理 1.1 的证明. 正如定理所述, 我们的下界估计具有如下形式:

$$E(t) = \|u(t)\|_2^2 + \|b(t)\|_2^2 \ge C(t+1)^{-\Theta}, \quad t \ge 0,$$

这里 $C > 0$, $\Theta = \theta = \min\{\frac{3+2m}{2\alpha}, \frac{3+2k}{2\beta}\}$ 或 $\Theta = \frac{5}{2\lambda} = \min\{\frac{5}{2\alpha}, \frac{5}{2\beta}\}$.

情形 1 $mk = 0$ (即 $\hat{u}_0(0) \ne 0$ 或 $\hat{b}_0(0) \ne 0$) 是容易处理的. 根据推论 2.3, 得到

$$\|v(t)\|_2^2 + \|w(t)\|_2^2 \ge C_0(t+1)^{-\theta}, \quad t \ge 0,$$

同时, 在上一节中证明了

$$\|D(t)\|_2^2 \le C(t+1)^{-\min\{\theta+\epsilon_0, \frac{5}{2\lambda}\}}, \quad t \ge 0.\tag{4.1}$$

如果能证明 $\theta < \frac{5}{2\lambda}$, 则 (4.1) 意味着 $D(t)$ 具有更快的衰减. 根据三角不等式, 有

$$E(t) \ge \|v(t)\|_2^2 + \|w(t)\|_2^2 - \|D(t)\|_2^2 \ge C_0(t+1)^{-\theta}, \quad t \ge 0,$$

这就完成了证明.

因此, 只需证明 $\theta < \frac{5}{2\lambda}$. 事实上, 注意到 $\frac{3}{4} \le \alpha, \beta < \frac{5}{4}$, 则如下关系成立:

$$\frac{3}{5} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{5}{3}.\tag{4.2}$$

利用 (4.2) 我们得到这一事实: 当 $m = 0$, 则 $\theta = \min\{\frac{3}{2\alpha}, \frac{3+2k}{2\beta}\} < \frac{5}{2\beta}$, 再结合平凡不等式 $\min\{\frac{3}{2\alpha}, \frac{3+2k}{2\beta}\} < \frac{5}{2\alpha}$, 就能得到 $\theta < \frac{5}{2\lambda}$; 当 $k = 0$, 则 $\theta = \min\{\frac{3+2m}{2\alpha}, \frac{3}{2\beta}\} < \frac{5}{2\alpha}$ 也能推出 $\theta < \frac{5}{2\lambda}$.

情形 2 $mk \ne 0$ (即 $\hat{u}_0(0) = \hat{b}_0(0) = 0$). 这种情况较为复杂, 我们在本节的余下部分处理.

首先, 将利用初值的 Fourier 表示来研究齐次分数次热方程.

引理 4.1 设 $v=v(x,t)$ 是 (2.1) 的解, 其初值 u_0 属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$. 假设存在 $\delta>0$, 使得 $\hat{u}_0$ 具有如下表示式

$$\hat{u}_0(\xi)=Y(\xi)\xi+Z(\xi),\quad \forall|\xi|\le\delta,$$

这里 Y 与 Z 满足如下条件:

- Y 是一个 3×3 矩阵值的零次齐次函数, 并且记 $\|Y\|=\sup_{|\xi|=1}|Y(\xi)|<\infty$.
- 存在某个 $M\ge0$, 使得 $|Z(\xi)|\le M|\xi|^2$ 对于所有的 $|\xi|\le\delta$ 成立.
- $\sigma\triangleq\int_{S^2}|Y(\omega)\omega|^2d\omega>0$,

则存在仅依赖于 M, $\|u_0\|_2$, $\|Y\|$, α 和 δ 的正常数 C, 使得对于任意 $t\ge1$, 如下不等式成立:

$$\|v(t)\|_2^2=C\sigma t^{-\frac{5}{2\alpha}}+O(t^{-\frac{3}{\alpha}}).\tag{4.3}$$

证明 由关系式

$$\left|\|v(t)\|_2^2-\int_{|\xi|\le\delta}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}}|\hat{u}_0(\xi)|^2d\xi\right|=\int_{|\xi|\ge\delta}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}}|\hat{u}_0(\xi)|^2d\xi\le\mathrm{e}^{-2t\delta^{2\alpha}}\|u_0\|_2^2,$$

可得 $v(t)$ 的高频部分按指数衰减. 因此, 只需证明 $v(t)$ 的低频部分 $\int_{|\xi|\le\delta}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}}|\hat{u}_0(\xi)|^2d\xi$ 按 $\frac{5}{2\alpha}$ 的代数衰减率收敛到零. 由于 $|\xi|\le\delta$, 根据 Fourier 表示式, 得到

$$|\hat{u}_0(\xi)|^2=|Y(\xi)\xi|^2+\Upsilon(\xi),\tag{4.4}$$

这里 $|\Upsilon(\xi)|\le C|\xi|^3$ 且 C 仅依赖于 M 和 $\|Y\|$. 容易得到

$$\int_{|\xi|\le\delta}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}}|\xi|^3d\xi\le\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}}|\xi|^3d\xi=Ct^{-\frac{3}{\alpha}}$$

与

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\le\delta}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^{2\alpha}}|Y(\xi)\xi|^2d\xi&=\int_0^\delta r^4\mathrm{e}^{-2tr^{2\alpha}}dr\int_{S^2}|Y(\omega)\omega|^2d\omega\\&=\frac{\sigma}{2\alpha}\int_0^{2t\delta^{2\alpha}}s^{\frac{5-2\alpha}{2\alpha}}\mathrm{e}^{-s}ds(2t)^{-\frac{5}{2\alpha}}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

注意到, 对于 $t\ge1$, 有

$$\frac{2\alpha}{5}2^{\frac{5}{2\alpha}}\delta^5\mathrm{e}^{-2\delta^{2\alpha}}\le\int_0^{2t\delta^{2\alpha}}s^{\frac{5-2\alpha}{2\alpha}}\mathrm{e}^{-s}ds\le\Gamma\left(\frac{5}{2\alpha}\right),$$

因此 (4.3) 是 (4.5) 的直接推论. 这就完成了引理的证明.

此外, 根据 Duhamel 公式, 得到

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)&=\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\alpha}}\hat{u}_0(\xi)-\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\alpha}}\hat{H}(\xi,\tau)d\tau,\\\hat{b}(\xi,t)&=\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\beta}}\hat{b}_0(\xi)-\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)|\xi|^{2\beta}}\hat{K}(\xi,\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{4.6}$$

由不可压条件 $\operatorname{div}u=\operatorname{div}b=0$, 可得

$$\hat{p}(\xi,t)=-\frac{1}{|\xi|^2}\sum_{k,j}\xi_k\xi_j(\widehat{u_ku_j}-\widehat{b_kb_j}),$$

这样就有

$$\begin{aligned}\hat{H}(\xi,t)&=\mathrm{i}\sum_j\xi_j(\widehat{u_ju}-\widehat{b_jb})-\mathrm{i}\frac{1}{|\xi|^2}\sum_{k,j}\xi_k\xi_j(\widehat{u_ku_j}-\widehat{b_kb_j})\xi,\\\hat{K}(\xi,t)&=\mathrm{i}\sum_j\xi_j(\widehat{u_jb}-\widehat{b_ju}).\end{aligned}\tag{4.7}$$

记 $a_{kj}=\widehat{u_ku_j}$, $b_{kj}=\widehat{b_kb_j}$, $c_{kj}=\widehat{u_jb_k}$, 可得如下引理, 该引理的证明可见文 [9].

引理 4.2 [9] 设 $2\le n\le 4$. (u,b) 是 GMHD 方程组 (1.2) 的一个弱解, 其初值 (u_0,b_0) 属于 $(L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)\cap W_2)^2$, 则对于任意的 $t\ge 0$, 存在仅依赖于 $t,\|u_0\|_2$ 和 $\|b_0\|_2$ 的正常数 C, 使得

$$\begin{aligned}&|\nabla_\xi a_{ij}(\xi,t)|\le C(t,\|u_0\|_2,\|b_0\|_2),\\&|\nabla_\xi b_{ij}(\xi,t)|\le C(t,\|u_0\|_2,\|b_0\|_2),\\&|\nabla_\xi c_{ij}(\xi,t)|\le C(t,\|u_0\|_2,\|b_0\|_2),\end{aligned}\tag{4.8}$$

这里 $a_{kj}=\widehat{u_ku_j}$, $b_{kj}=\widehat{b_kb_j}$, $c_{kj}=\widehat{u_jb_k}$.

记 3×3 矩阵 $A(\xi,t)=[a_{kj}-b_{kj}]$, $C(\xi,t)=[c_{kj}-c_{jk}]$, $P(\xi)=[\frac{\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}]$, 则

$$\begin{aligned}&\hat{H}(\xi,t)=\mathrm{i}\big(I-P(\xi)\big)A(\xi,t)\xi,\\&\hat{K}(\xi,t)=\mathrm{i}C(\xi,t)\xi.\end{aligned}\tag{4.9}$$

进一步地, 对于 $t\ge 0$, 定义 $\mathscr{A}(t)=[\mathscr{A}_{kj}(t)]\triangleq\int_0^t A(0,s)ds$, $\mathscr{C}(t)=[\mathscr{C}_{kj}(t)]\triangleq\int_0^t C(0,s)ds$,

$$\begin{aligned}&\kappa_1(t)\triangleq\frac{\pi^{n/2}}{n(n+2)\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\bigg(\sum_{k\ne j}(\mathscr{A}_{kk}(t)-\mathscr{A}_{jj}(t))^2+2n\sum_{k\ne j}\mathscr{A}_{kj}(t)^2\bigg),\\&\kappa_2(t)\triangleq-\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\sum_{k\ne j}\big(D_\xi\hat{b}_0(0)-\mathrm{i}\mathscr{C}_{kj}(t)\big)^2.\end{aligned}$$

我们引入 $\kappa_1(t)$ 与 $\kappa_2(t)$ 的定义是由于如下引理.

引理 4.3 [9] 设 $\Theta(\xi)=I-P(\xi)$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵, $P(\xi)$ 由如上定义. 假设 $S=[s_{jk}]$ 是一个对称矩阵, 则对于任意的 $t\ge 0$, 有

$$\rho_1=\int_{S^{n-1}}P(\omega)S\omega\cdot S\omega=\frac{\pi^{n/2}}{n(n+2)\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\bigg(\sum_{k\ne j}(s_{jj}-s_{kk})^2+2n\sum_{k\ne j}s_{jk}^2\bigg).\tag{4.10}$$

接下来将引入定理 1.1 中的重要集合 $\mathscr{M}$.

定义 4.4 设 (u,b) 是 GMHD 方程组 (1.2) 的一个弱解, 其初值 (u_0,b_0) 属于空间 $(L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3))^2$. 称 $(u,b)\in\mathscr{M}_1$ 当且仅当

$$D_\xi\hat{u}_0(0)=0\quad\text{和}\quad\lim_{t\to\infty}\kappa_1(t)=0.$$

$(u,b)\in\mathscr{M}_2$ 当且仅当

$$D_\xi\hat{b}_0(0)=0\quad\text{和}\quad\lim_{t\to\infty}\kappa_2(t)=0.$$

更进一步地, 记 $\mathscr{M}\triangleq\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2$.

在证明本节的主要结果前, 需要如下引理.

引理 4.5 [9] 设 V 是一个 $n\times n$ 复矩阵, B 是一个 $n\times n$ 实对称矩阵. 如果对于任意的向量 $\omega\in S^{n-1}$, 有

$$V\omega-\mathrm{i}(I-P(\omega))B\omega=0,$$

则 $V=0$ 并且 B 是一个数量阵.

接下来, 将证明这一节的主要定理.

定理 4.6 设 $\alpha,\beta>0$, (u,b) 是 GMHD 方程组 (1.2) 的一个弱解, 其初值 (u_0,b_0) 属于空间 $(L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)\cap W_1\cap W_2)^2$.

(1) 若 $(u_0,b_0)\in\mathscr{M}^c$, 则存在仅依赖于 M, $\|u_0\|_2$, $\|b_0\|_2$, $\|Y\|$, α, β 和 δ 的正常数 C_0, 使得

$$\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2\geq C_0(t+1)^{-\frac{5}{2\max\{\alpha,\beta\}}}.$$

(2) 若 $(u_0,b_0)\in\mathscr{M}$, 则对于任意的 $\epsilon>0$, 存在时间 T_ϵ, 使得

$$\|u(t)\|_2^2+\|b(t)\|_2^2\leq \epsilon(t+1)^{-\frac{5}{2\max\{\alpha,\beta\}}},\quad \forall\, t\geq T_\epsilon.$$

证明　记 $O(t,\xi)$ 为依赖于 ξ,t 的一个有界量, 其中 $\xi\in\mathbb{R}^3$, $t\geq 0$. 对于 (4.9) 应用引理 4.2, 可得

$$\begin{aligned}\hat{H}(\xi,t)&=\mathrm{i}(I-P(\xi))A(0,t)\xi+O(t,\xi)|\xi|^2,\\ \hat{K}(\xi,t)&=\mathrm{i}C(0,t)\xi+O(t,\xi)|\xi|^2.\end{aligned}\tag{4.11}$$

因为 $(u_0,b_0)\in W_1$, 所以它们是二次连续可微的并且具有有限的偏导数, 我们能把 $\hat{u}_0$ 和 $\hat{b}_0$ 展开成在原点的二次 Taylor 级数, 注意到 $\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\alpha}}=1+O(t,\xi)|\xi|^{2\alpha}$, 并应用引理 4.2, 则可由 (4.6) 推出

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)&=\hat{u}_0(0)+D_\xi\hat{u}_0(0)\xi-\mathrm{i}(I-P(\xi))\mathscr{A}(t)\xi+O(t,\xi)|\xi|^2,\\ \hat{b}(\xi,t)&=\hat{b}_0(0)+D_\xi\hat{b}_0(0)\xi-\mathrm{i}\mathscr{C}(t)\xi+O(t,\xi)|\xi|^2.\end{aligned}\tag{4.12}$$

令

$$Y_1(\xi,t)=D_\xi\hat{u}_0(0)-\mathrm{i}(I-P(\xi))\mathscr{A}(t),$$

$$Y_2(\xi,t)=Y_2(t)=D_\xi\hat{b}_0(0)-\mathrm{i}\mathscr{C}(t),$$

(4.12) 可改写为

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)&=Y_1(\xi,t)\xi+O(t,\xi)|\xi|^2,\\ \hat{b}(\xi,t)&=Y_2(\xi,t)\xi+O(t,\xi)|\xi|^2.\end{aligned}\tag{4.13}$$

首先, 来考虑情形 1, 由定义 4.4, $(u_0,b_0)\in\mathscr{M}^c$ 意味着如下的四个等式至少有一个成立:

$$D_\xi\hat{u}_0(0)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\kappa_1(t)=0,\quad D_\xi\hat{b}_0(0)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\kappa_2(t)=0.$$

假设 $D_\xi\hat{u}_0(0)\neq 0$ 或者 $\lim_{t\to\infty}\kappa_1(t)\neq 0$. 我们声明, 一定存在 $T_0>0$, $\sigma_0>0$, 对于任意的 $t\geq T_0$, 均有

$$\int_{S^2}|Y_1(\omega,t)\omega|^2d\omega\geq\sigma_0.\tag{4.14}$$

如若不然, 则有

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{S^2}|Y_1(\omega,t)\omega|^2d\omega=0.$$

命 $\tilde{\mathscr{A}}=\int_0^\infty A(0,s)ds=\lim_{t\to\infty}\mathscr{A}(t)$, 可得

$$\int_{S^2}|\tilde{Y_1}(\omega)\omega|^2d\omega=0,$$

其中

$$\tilde{Y_1}(\xi)=D_\xi\hat{u}_0(0)-\mathrm{i}(I-P(\xi))\tilde{\mathscr{A}}.$$

因此, 对于任意 $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, 均有 $\tilde{Y_1}(\xi)\xi=0$. 由引理 4.5 知 $D_\xi\hat{u}_0(0)=0$, 并且 $\tilde{\mathscr{A}}$ 是一个数量阵 (即 $\lim_{t\to\infty}\kappa_1(t)=0$), 这与我们的假设矛盾.

类似地, 假设 $D_\xi\hat{b}_0(0)\neq 0$ 或 $\lim_{t\to\infty}\kappa_2(t)\neq 0$, 我们能证明存在 $T_0>0$, $\sigma_0>0$, 对于任意的 $t\geq T_0$, 均有

$$\int_{S^2}|Y_2(t)\omega|^2 d\omega\geq\sigma_0. \tag{4.15}$$

因此 (4.14) 与 (4.15) 至少有一个成立. 令 $T\geq T_0$ 待定, 设 $(v(t),w(t))$ 是热方程组 (2.5) 关于初值 $(u_0,b_0)=(u(T),b(T))$ 的解. 由引理 4.1 可得, 存在仅依赖于 M, $\|u_0\|_2$, $\|Y\|$, σ 和 δ 的正常数 C_0, 使得下式成立

$$\|v(t)\|_2^2+\|w(t)\|_2^2\geq C_0t^{-\frac{5}{2\lambda}}. \tag{4.16}$$

记 $D(t)=(D_1(t),D_2(t))=(u(t+T),b(t+T))-(v(t),w(t))$ 并运用 Fourier 分解法. 取

$$g(t)=\frac{\gamma}{2t}\quad 和 \quad G(t)=\mathrm{e}^{2\int_0^t g(s)ds}=t^\gamma,$$

这里 $t\geq\max\{1,\frac{\gamma}{2\delta^\alpha}\}$, 因此不等式 (3.21) 转变为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^\gamma\|D(t)\|_2^2)\leq{}&2t^\gamma\left(\frac{\gamma}{2}t^{-1}\|D_1(t)\|_2^2-\|\Lambda^\alpha D_1(t)\|_2^2\right)+2t^\gamma\left(\frac{\gamma}{2}t^{-1}\|D_2(t)\|_2^2-\|\Lambda^\beta D_2(t)\|_2^2\right)\\&+2t^\gamma\|D(t)\|_2E(t)^{\frac12}(\|\nabla v\|_\infty+\|\nabla w\|_\infty),\end{aligned} \tag{4.17}$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^\gamma\|D(t)\|_2^2)\leq{}&2t^{\gamma-1}\int_{2t|\xi|^{2\alpha}\leq\gamma}|\hat{D}_1(\xi,t)|^2d\xi\\&+2t^{\gamma-1}\int_{2t|\xi|^{2\beta}\leq\gamma}|\hat{D}_2(\xi,t)|^2d\xi+C_Tt^{\gamma-\frac{5}{\lambda}},\end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 C_T 是依赖于 T 的正常数.

另一方面, 当 $t\to\infty$ 时, $\|u(t)\|_2^2$ 与 $\|b(t)\|_2^2$ 具有 $t^{-\frac{5}{2\lambda}}$ 的衰减, 能得到

$$\begin{aligned}|\hat{D}(\xi,t)|&\leq C|\xi|\int_0^t(\|u(s+T)\|_2^2+\|b(s+T)\|_2^2)ds\\&\leq C|\xi|\int_T^\infty(\|u(s)\|_2^2+\|b(s)\|_2^2)ds\\&\leq C|\xi|T^{-\frac{5}{2\lambda}+1},\end{aligned} \tag{4.19}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{2t|\xi|^{2\alpha}\leq\gamma}|\hat{D}_1(\xi,t)|^2d\xi\leq CT^{-\frac{5}{\alpha}+2}t^{-\frac{5}{2\alpha}},\\&\int_{2t|\xi|^{2\beta}\leq\gamma}|\hat{D}_2(\xi,t)|^2d\xi\leq CT^{-\frac{5}{\beta}+2}t^{-\frac{5}{2\beta}}.\end{aligned}$$

在 (4.18) 中运用上式可得

$$\frac{d}{dt}(t^\gamma\|D(t)\|_2^2)\leq CT^{-\frac{5}{\lambda}+2}t^{\gamma-1-\frac{5}{2\lambda}}+C_Tt^{\gamma-\frac{5}{\lambda}}. \tag{4.20}$$

取 $\gamma>\frac{5}{\lambda}$, 则上式右端项中 t 的幂次均大于零, 于是, 在 $[1,t]$ 上进行时间积分, 可推得

$$\|D(t)\|_2^2\leq CT^{-\frac{5}{\lambda}+2}t^{-\frac{5}{2\lambda}}+C_Tt^{1-\frac{5}{\lambda}}. \tag{4.21}$$

接下来, 取 T 充分大, 使得 $CT^{-\frac{5}{\lambda}+2}$ 小于 $\frac{1}{4}C_0$, 这里 C_0 是 (4.16) 中的正常数. 由三角不等式, 可得

$$\begin{aligned}\|u(t+T)\|_2^2+\|b(t+T)\|_2^2 &\geq \big(\|v(t)\|_2+\|w(t)\|_2-\|D(t)\|_2\big)^2\\ &\geq \frac{1}{2}\big(\|v(t)\|_2^2+\|w(t)\|_2^2\big)-\|D(t)\|_2^2\\ &\geq \frac{1}{4}C_0t^{-\frac{5}{2\lambda}},\end{aligned}\tag{4.22}$$

这样, 就在情形 1 时证明了定理.

最后考虑情形 2, 也就是 (u_0,b_0) 属于 $\mathscr{M}$, 我们断言一定有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{S^2}|Y_1(\omega,t)\omega|^2d\omega=\lim_{t\to\infty}\int_{S^2}|Y_2(t)\omega|^2d\omega=0.\tag{4.23}$$

事实上, 回顾 $Y_2(t)=D_\xi\hat{b}_0(0)-\mathrm{i}\mathscr{C}(t)$ 以及 $\mathscr{M}$ 的定义, 可得

$$\lim_{t\to\infty}\int_{S^2}|Y_2(t)\omega|^2d\omega=0.$$

另一方面, $(u_0,b_0)\in\mathscr{M}$ 意味着 $D_\xi\hat{u}_0(0)=0$, 因此

$$\lim_{t\to\infty}\int_{S^2}|Y_1(\omega,t)\omega|^2d\omega=\lim_{t\to\infty}\kappa_1(t)=0.$$

令 $\sigma_1(t)=\int_{S^2}|Y_1(\omega,t)\omega|^2d\omega+\int_{S^2}|Y_2(t)\omega|^2d\omega$, 由 (4.23) 知

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_1(t)=0.$$

所以, 我们能取充分大的 T, 使得 $C\sigma_1(T)\leq\frac{\epsilon}{4}$. 根据引理 4.1, 对于任意 $t>T$, 有

$$\|v(t)\|_2^2+\|w(t)\|_2^2\leq\frac{\epsilon}{4}t^{-\frac{5}{2\alpha}}+O(t^{-\frac{3}{\alpha}}).\tag{4.24}$$

此外, 类似于情形 1, 容易估计 $D(t)$. 取 T 充分大, 可得

$$\|D(t)\|_2^2\leq\frac{\epsilon}{4}t^{-\frac{5}{2\alpha}}+O(t^{-\frac{3}{\alpha}}).\tag{4.25}$$

综合 (4.24) 与 (4.25), 就完成了证明.

注 4.7　我们在这里强调一下在定理 4.6 中关于初值 (u_0,b_0) 的假设是合理的. 根据接下来的引理 4.8, $(u_0,b_0)\in(L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3))^2$ 保证了 $\hat{u}_0(0)=\hat{b}_0(0)=0$, 并且 $(u_0,b_0)\in(W^2\cap W^1)^2$ 保证了定理 4.6 证明过程中每一个表达式都是良定的.

引理 4.8 (Borchers)　设 $u(x)\in[L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2_\sigma(\mathbb{R}^d)]^d$, 则 $\int_{\mathbb{R}^d}u(x)\,dx=0$.

证明　命 $\rho(x)$ 为标准的磨光算子, $\rho_N(x)\triangleq N^d\rho(Nx)$. 记 $u_N=\rho_N*u$, 则可得

$$u_N\in C_0^\infty,\quad \operatorname{div}u_N=0,\quad u_N\xrightarrow{L^1}u\quad 当\ N\to\infty.$$

因此, 对于每一个 $i=1,2,\dots,d$, 均有

$$\int_{\mathbb{R}^d}u_N^i(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}u_N(x)\cdot\nabla x_i\,dx=-\int_{\mathbb{R}^d}x_i\operatorname{div}u_N(x)\,dx=0,$$

这就得出了

$$\int_{\mathbb{R}^d}u(x)\,dx\leq\int_{\mathbb{R}^d}|u_N(x)-u(x)|\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}u_N(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}|u_N(x)-u(x)|\,dx,$$

令 $N\to\infty$, 就完成了引理的证明.

注意到在定理 4.6 的证明过程中, u 和 b 的地位是一致的并且完全独立, 我们实际上是证明了如下推论:

推论 4.9 设 (u,b) 是 GMHD 方程组 (1.2) 的一个弱解, 其初值 (u_0,b_0) 属于空间 $(L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)\cap L^1(\mathbb{R}^3)\cap W_1\cap W_2)^2$.

(1) 若 $u_0\in\mathscr{M}_1^c$, 则存在仅依赖于 M, $\|u_0\|_2$, $\|b_0\|_2$, $\|Y\|$, α 和 δ 的正常数 C_0, 使得

$$\|u(t)\|_2^2\geq C_0(t+1)^{-\frac{5}{2\alpha}}.$$

(2) 若 $b_0\in\mathscr{M}_2^c$, 则存在仅依赖于 M, $\|u_0\|_2$, $\|b_0\|_2$, $\|Y\|$, β 和 δ 的正常数 M_0, 使得

$$\|b(t)\|_2^2\geq M_0(t+1)^{-\frac{5}{2\beta}}.$$

A 附录: 三维广义 MHD 方程组弱解的存在性

本节证明只要初值属于 L^2, 三维广义 MHD 方程组就具有整体的弱解. 这一结果在吴家宏的文 [12] 中曾提及, 这里我们能严格证明 GMHD 方程组 (1.2) 具有如下定义的全局弱解.

定义 A.1 $(u(x,t),b(x,t))$ 被称为 GMHD 方程组 (1.2) 的弱解是指它满足:

(1) $u\in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T];\dot H^\alpha(\mathbb{R}^3))$, $b\in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T];\dot H^\beta(\mathbb{R}^3))$.

(2) 对于散度自由的试验函数 $\phi\in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)$, 并且 $\phi(\cdot,T)=0$, 则有

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\phi_t-u\cdot\Lambda^{2\alpha}\phi-u\cdot(u\cdot\nabla)\phi+b\cdot\nabla\phi\cdot b)\,dxd\tau=-\int_{\mathbb{R}^3}u(x,0)\phi(x,0)\,dx,$$
$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\phi_t-b\cdot\Lambda^{2\beta}\phi-b\cdot(u\cdot\nabla)\phi+b\cdot\nabla\phi\cdot u)\,dxd\tau=-\int_{\mathbb{R}^3}b(x,0)\phi(x,0)\,dx.$$

(3) $\operatorname{div}u(x,t)=0$, $\operatorname{div}b(x,t)=0$ 在分布意义下成立.

(4) 对于任意 $t\in[0,T]$, 如下的能量不等式成立

$$\|u(t)\|_2^2+\int_0^t\|\Lambda^\alpha u(\tau)\|_2^2d\tau+\|b(t)\|_2^2+\int_0^t\|\Lambda^\beta b(\tau)\|_2^2d\tau\leq\|u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2.$$

命题 A.2 (Bernstein 不等式) B 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个球. 则存在正常数 C, 使得对于所有的整数 $k\geq0$, 以及 $b\geq a\geq1$, $u\in L^a$, 如下的估计成立:

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_b\leq C^{k+1}\lambda^{k+n(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_a,\quad \operatorname{supp}\hat u\subset\lambda B.$$

我们将利用 Friedrichs 方法证明如下的弱解存在性定理.

定理 A.3 设 $\alpha,\beta>0$. 固定时间 $T>0$, 若初值 (u_0,b_0) 属于 $[L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)]^2$, 则 GMHD 系统 (1.2) 在 $[0,T]$ 上具有满足定义 A.1 的整体弱解.

证明 命 J_N 为如下定义的低频截断算子 $\widehat{J_Nf}(\xi)=\chi_{\{|\xi|\leq N\}}\hat f(\xi)$, $\mathscr{P}$ 表示 Leray 投影算子. 在 $L^2_N=\{f\in L^2(\mathbb{R}^3):\operatorname{supp}\hat f(\xi)\subset B(0,N)\}$ 集合中, 考虑如下的常微分系统:

$$\begin{cases}u_t+J_N\Lambda^{2\alpha}u+\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nu\cdot\mathscr{P}J_N\nabla u)-\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nb\cdot\mathscr{P}J_N\nabla b)=0,\\ b_t+J_N\Lambda^{2\beta}b+\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nu\cdot\mathscr{P}J_N\nabla b)-\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nb\cdot\mathscr{P}J_N\nabla u)=0,\\ b(x,0)=J_Nu_0(x),\quad b(x,0)=J_Nb_0(x).\end{cases}\tag{A.1}$$

首先, 应用 Picard 定理 [4] 来证明系统 (A.1) 解的局部存在唯一性. (A.1)的前两个方程可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -J_N\Lambda^{2\alpha}u - \mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nu\cdot\mathscr{P}J_N\nabla u) + \mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nb\cdot\mathscr{P}J_N\nabla b), \\ \dfrac{db}{dt} = -J_N\Lambda^{2\beta}b - \mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nu\cdot\mathscr{P}J_N\nabla b) + \mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nb\cdot\mathscr{P}J_N\nabla u), \end{cases}$$

所以, 只要证明上面方程组的右边项都是局部 Lipschitz 的.

事实上, 对于任意的 $u,v,b,w\in L^2_N$, 根据 Hölder 不等式以及 Bernstein 不等式, 有

$$\|J_N\Lambda^{2\alpha}u - J_N\Lambda^{2\alpha}v\|_2 \le N^{2\alpha}\|u-v\|_2,$$

以及

$$\begin{aligned} &\|\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nu\cdot\mathscr{P}J_N\nabla b) - \mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nv\cdot\mathscr{P}J_N\nabla w)\|_2 \\ &\quad\le \|\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_N(u-v)\cdot\mathscr{P}J_N\nabla b)\|_2 + \|\mathscr{P}J_N(\mathscr{P}J_Nv\cdot\mathscr{P}J_N\nabla(b-w))\|_2 \\ &\quad\le \|\mathscr{P}J_N\mathscr{P}J_N(u-v)\|_2\|\mathscr{P}J_N\nabla b\|_\infty + \|\mathscr{P}J_N\mathscr{P}J_Nv\|_\infty\|\mathscr{P}J_N\nabla(b-w)\|_2 \\ &\quad\le N^{\frac52}(\|b\|_2+\|v\|_2)(\|u-v\|_2+\|b-w\|_2). \end{aligned}$$

这样, 证明了 (A.1) 在 $C^1([0,T_N);L^2_N)$ 中具有唯一的局部解 (u_N,b_N).

其次, 将证明上面的解 (u_N,b_N) 是整体的. 注意到 $\mathscr{P}^2=\mathscr{P}$, $J_N^2=J_N$ 以及 $\mathscr{P}J_N=J_N\mathscr{P}$, 容易得到 $(\mathscr{P}u_N,\mathscr{P}b_N)$ 和 (J_Nu_N,J_Nb_N) 也是 (A.1) 的解. 根据解的唯一性, 可得

$$(\mathscr{P}u_N,\mathscr{P}b_N) = (J_Nu_N,J_Nb_N) = (u_N,b_N).$$

因此 (A.1) 能简化为:

$$\begin{cases} \partial_tu_N + \Lambda^{2\alpha}u_N + \mathscr{P}J_N(u_N\cdot\nabla u_N) - \mathscr{P}J_N(b_N\cdot\nabla b_N) = 0, \\ \partial_tb_N + \Lambda^{2\beta}b_N + \mathscr{P}J_N(u_N\cdot\nabla b_N) - \mathscr{P}J_N(b_N\cdot\nabla u_N) = 0, \\ b(x,0) = J_Nu_0(x), \quad b(x,0) = J_Nb_0(x). \end{cases} \tag{A.2}$$

分别用 u_N 和 b_N 乘以 (A.2) 的前两个方程, 并且做时空积分, 注意到 u_N,b_N 是散度自由的, 可得

$$\begin{aligned} &\|u_N(t)\|_2^2 + \int_0^t\|\Lambda^\alpha u_N(\tau)\|_2^2d\tau + \|b_N(t)\|_2^2 + \int_0^t\|\Lambda^\beta b_N(\tau)\|_2^2d\tau \\ &\quad\le \|u_N(0)\|_2^2 + \|b_N(0)\|_2^2 \le \|u_0\|_2^2 + \|b_0\|_2^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

这就说明 (u_N,b_N) 可延拓到任意有限时间 T, 即解 (u_N,b_N) 是整体的.

接下来, 将利用 Aubin–Lions 引理 [11] 去证明, 对于任意有界集 $\Omega\in\mathbb{R}^3$, u_N (准确地说, 应为其子列) 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中的强收敛性.

事实上, 对于任意的试验函数 $h\in L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^3))$, 当 $\alpha+\beta\le\frac52$ 时, 利用 Hölder 不等式和 Gagliardo–Nirenberg 不等式, 得到

$$\begin{aligned} &\int_0^T\langle\mathscr{P}J_N(u_N(s)\cdot\nabla b_N(s)),h(s)\rangle ds \\ &\quad\le C\int_0^T\|u_N(s)\|_{\frac{6}{3-\alpha}}\|b_N(s)\|_{\frac{6}{3-\beta}}\|\nabla h(s)\|_{\frac{6}{\alpha+\beta}}ds \\ &\quad\le C\int_0^T\|u_N(s)\|_2^{1/2}\|\Lambda^\alpha u_N(s)\|_2^{1/2}\|b_N(s)\|_2^{1/2}\|\Lambda^\beta b_N(s)\|_2^{1/2}\|\nabla^3h(s)\|_2^{\frac{5-2(\alpha+\beta)}{6}}\|h(s)\|_2^{\frac{1+2(\alpha+\beta)}{6}}ds \\ &\quad\le C(\|u_N\|_2+\|b_N\|_2)(\|\Lambda^\alpha u_N\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))} + \|\Lambda^\beta b_N\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^3))})\|h\|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^3))}, \\ &\quad\le C(\|u_0\|_2^2+\|b_0\|_2^2)\|h\|_{L^2(0,T;H^3(\mathbb{R}^3))}, \end{aligned} \tag{A.4}$$

容易得到其它同类项也具有相同的估计. 综合这些估计, 得到了

$$\partial_t u_N \in L^2(0,T;H^{-3}(\mathbb{R}^3)), \quad \partial_t b_N \in L^2(0,T;H^{-3}(\mathbb{R}^3)).$$

这样, 结合 (A.3) 可以得出

$$(u_N,b_N) \to (u,b) \text{ 在 } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ 中, 对于任意 } \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

我们挑选满足 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i = \mathbb{R}^3$ 和 $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \cdots$, 并且具有光滑边界的集合列 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$. 对于固定的 i, 存在 $\{(u_N,b_N)\}_{N=1}^{\infty}$ 的一个子列 (这里仍记为 $\{(u_N,b_N)\}_{N=1}^{\infty}$), 使得 (u_N,b_N) 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega_i))$ 中强收敛到 (u,b). 最后利用对角线原理, 存在子列 $\{(u_N,b_N)\}_{N=1}^{\infty}$, 使得关于 $i=1,2,\ldots$, 均有 (u_N,b_N) 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega_i))$ (因此在 $L^2(0,T;L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3))$) 中强收敛到 (u,b). 这就保证了该极限 $(u(x,t),b(x,t))$ 是 (1.2) 的一个弱解.

当 $\alpha+\beta \geq \frac{5}{2}$ 时, 周勇 [13] 已经证明了三维广义 MHD 方程具有整体光滑解. 这样, 定理 A.3 就得证了.

参 考 文 献

[1] Jiu Q., Yu H., Decay of solutions to the three-dimensional generalized Navier–Stokes equations, *Asymptotic Analysis*, 2015, **94**: 105–124.

[2] Kato T., Strong L^p-solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions, *Math. Z.*, 1984, **187**: 471–480.

[3] Leray J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 1934, **63**: 193–248.

[4] Majda J., Bertozzi L., Vorticity and Incompressible Flow, Cambribge Texts in Applied Mathematics No. 27, 2002.

[5] Schonbek M., Decay of parabolic conservation laws, *Comm. Part. Diff. Equ.*, 1980, **7**: 449–473.

[6] Schonbek M., L^2 decay for weak solutions of the Navier–Stokes, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1985, **88**: 209–222.

[7] Schonbek M., Large time behavior of solutions to the Navier–Stokes equations, *Comm. Part. Diff. Equ.*, 1985, **11**: 733–763.

[8] Schonbek M., Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier–Stokes equations, *J. mer. Math.*, 1991, **4**: 423–449.

[9] Schonbek M., Schonbek T., Suli E., Large time behavior of solutions to the magneto-hydrodynamics equations, *Math. Ann.*, 1996, **304**: 717–756.

[10] Stein E., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University, Princeton, USA, 1970.

[11] Temam R., Navier–Stokes Equations, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[12] Wu J., Generalized MHD equations, *J. Diff. Equ.*, 2003, **195**: 284–312.

[13] Zhou Y., Regularity criteria for the generalized viscous MHD equations, *Ann. Inst. Henri. Poincaré*, 2007, **24**: 491–505.