第61卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.61, No.1
2018年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2018

文章编号: 0583-1431(2018)01-0107-16 **文献标识码:** **A**

具有弱中间幂等元的正则半群

倪翔飞

浙江师范大学数理与信息工程学院 金华 321004
E-mail: nxf@zjnu.cn

郭小江

江西师范大学数学与信息科学学院 南昌 330027
E-mail: xjguo@jxnu.edu.cn

摘　要　本文在正则半群上引入弱中间幂等元和拟中间幂等元, 着重探讨了这两类幂等元的性质特征. 构造了若干具有弱 (拟) 中间幂等元的正则半群, 确定了弱中间幂等元和拟中间幂等元之间的关系, 给出了弱中间幂等元和拟中间幂等元各自的等价判定, 利用拟中间幂等元刻画了纯正半群. 最后, 得到了构造具有拟中间幂等元的正则半群的一般途径, 并在此基础上进一步给出了判定正则半群是否具有乘逆断面的方法.

关键词　弱中间幂等元; 拟中间幂等元; 中间幂等元; 正则半群

MR(2010) 主题分类　20M10

中图分类　O152.7

Regular Semigroups With Weak Medial Idempotents

Xiang Fei NI

College of Mathematis, Physics and Information Engineering,
Zhejiang Normal University, Jinhua 321004*, P. R. China*
E-mail: *nxf@zjnu.cn*

Xiao Jiang GUO

College of Mathematis and Information Science, Jiangxi Normal University,
Nanchang 330027*, P. R. China*
E-mail: *xjguo@jxnu.edu.cn*

Abstract　In this paper, the concepts of weak medial idempotent and quasi-medial idempotent of regular semigroups are introduced. The aim of this paper is to explore the properties of the two types of idempotents. Several regular semigroups having weak(quasi-) medial idempotents are constructed to indicate the relationship between weak medial idempotents and quasi-medial idempotents, various ways are given to confirm that an idempotent is a weak medial idempotent or a quasi-medial idempotent,

收稿日期: 2016-11-09; 接受日期: 2017-04-25
基金项目: 国家自然科学青年基金资助项目 (11401534)

and some descriptions of orthodox semigroups in terms of quasi-media idempotents are hold. At last, the structure theorem of every regular semigroup with a quasi-medial idempotent is obtained. As an application of the results, such kind of construction method help us to get a way to determine whether a regular semigroup contains a multiplicative inverse transversal or not.

Keywords weak medial idempotent; medial idempotent; normal medial idempotent; regular semigroup
MR(2010) Subject Classification 20M10
Chinese Library Classification O152.7

1 引言

正则半群 S 的幂等元 u 称为中间幂等元, 如果对 $\overline{E}$ 中的任意元素 x 有 $xux=x$, 其中 $\overline{E}$ 是由 S 的幂等元集 E 生成的子半群. 中间幂等元 u 称为正规的, 如果 $u\overline{E}u$ 是半格. 自 1982 年 Blyth 和 McFadden [1] 引入正则半群的中间幂等元之后, 对具有特殊幂等元的半群的研究吸引了不少学者的关注. 1983 年 Blyth 和 McFadden [3] 给出了具有正规幂等元的正则半群构造定理; Longanathan [8] 刻画了具有中间幂等元的正则半群的结构.

特别地, 郭小江 [6] 在富足半群上定义了弱中间幂等元和弱正规幂等元, 并刻画了具有弱正规幂等元的富足半群的结构. 富足半群 S 的幂等元 u 称为弱中间幂等元, 如果对 S 的幂等元集 E 中的任意元素 x 有 $xux=x$; 弱中间幂等元 u 称为弱正规的, 如果 uSu 是恰当半群. 文 [5] 描述了富足半群的弱正规幂等元与 PQS- 恰当断面之间的关系.

本文在正则半群上引入弱中间幂等元和拟中间幂等元, 着力探讨了这两类幂等元的性质特征. 在第 2 节, 构造了具有弱中间幂等元的正则半群, 给出了弱中间幂等元的若干等价刻画, 并利用弱中间幂等元描述了拟中间幂等元. 同样地, 在第 3 节开篇给出不同类型的具有拟中间幂等元的正则半群, 证明了拟中间幂等元的存在具有多样性; 得到了一般幂等元是拟中间幂等元的一些等价判定; 明确了具有拟中间幂等元的正则半群类与纯正半群类之间的相关性, 并利用拟中间幂等元的性质特征刻画了纯正半群. 作为上一节研究结果的应用, 第 4 节给出了具有拟中间幂等元的正则半群的构造方法. 最后, 利用所得的结构定理证明了乘逆断面可以由正规幂等元来刻画.

为方便随后的讨论, 下面列出一些需要的结论, 见文 [4, 7].

令 S 是正则半群, E 是它的幂等元集, 则

$$(\forall\, e,f\in E)\ S(e,f)=\{g\in V(ef)\,|\,ge=fg=g\}\quad \text{且}\ \ fV(ef)e\in S(e,f).$$

任取

$$x,y\in S,\quad y'S(x'x,yy')x'\in V(xy),$$

其中 $x'\in V(x)$, $y'\in V(y)$.

称正则半群 S 的子半群 S° 是纯正断面, 如果

(O1) $(\forall\, x\in S)$, $V_{S^\circ}(x)\neq\emptyset$.

(O2) $(\forall\, x,y\in S)$ $\{x,y\}\cap S^\circ\neq\emptyset\Rightarrow V_{S^\circ}(x)V_{S^\circ}(y)\subseteq V_{S^\circ}(yx)$.

$$I=\{aa^\circ : a\in S,\, a^\circ\in V_{S^\circ}(a)\}\ \ \text{和}\ \ \Lambda=\{b^\circ b : b\in S,\, b^\circ\in V_{S^\circ}(b)\}$$

是研究断面的两个重要幂等元子集.

2 弱中间幂等元

本节在给出正则半群上弱中间幂等元和拟中间幂等元的概念后, 通过构造实例证明了定义的合理性. 同时还确定了弱中间幂元存在的不唯一性. 随后讨论弱中间幂等元的性质特征, 给出了弱中间幂等元存在的充分必要条件, 并进一步利用弱中间幂等元给出了拟中间幂等元的若干刻画.

定义 2.1 正则半群 S 的幂等元 u 称为弱中间幂等元, 如果对任意的 $x \in E$, 有 $xux = x$, 其中 E 为 S 的幂等元集. 弱中间幂等元 u 又称为拟中间幂等元, 如果 uEu 是幂等元带.

下面验证上述定义是有意义的.

例 2.2 若 S 是矩形带, 则其任意幂等元是拟中间幂等元.

例 2.3 令 Q 为有理数集. 对任意 $x \in Q$ 且 $x \geq 0$. 令

$$S_x = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right\}.$$

容易验证, $S = \bigcup_{x \geq 0} S_x$ 关于矩阵乘法是一个正则半群但不是纯正半群. 因此, 单位元 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 是 M 的弱中间幂等元, 但不是拟中间幂等元.

例 2.4 给定集合 $L = R = \{1, 2\}$. 令 S 为例 2 所述的正则半群, $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. 在集合 $\mathscr{M} = L \times S \times R$ 上定义运算:

$$(l, s, r)(i, t, j) = (l, st, j).$$

容易验证, $\mathscr{M}$ 是一正则半群, 它的幂等元集是 $E(\mathscr{M}) = L \times E(S) \times R$. 因 $E(S)$ 不是幂等元带, 故 $\mathscr{M}$ 不是一个纯正半群. 幂等元集 $L \times \{e\} \times R$ 中的任意元素都是弱中间幂等元.

以上实例表明弱中间幂等元是拟中间幂等元和中间幂等元的真推广, 且弱中间幂等元的存在不是唯一的.

在后续的论述中, 如果没有特别说明, 常设 S 为正则半群, $E(S)$ 是 S 的幂等元集, 在不引起混淆的情况下简记为 E.

引理 2.5 设 u 为 S 的弱中间幂等元. 对任意的 $a \in S$, $e \in E$, 有

(1) $eu, ue, ueu \in E$;

(2) $(\forall f \in R_a \cap E,\ \forall g \in L_a \cap E)$, $fu \mathscr{R} a \mathscr{L} ug$;

(3) $(\forall f \in R_a \cap E,\ \forall g \in L_a \cap E)$, $ufu \mathscr{R} uau \mathscr{L} ugu$;

(4) $au \mathscr{R} a \mathscr{L} ua$;

(5) $uEu = E(uSu)$, $uE = E(uS)$, $Eu = E(Su)$;

(6) $ueu \in V(e)$.

证明 (1)–(3) 可见文 [6, 命题 2.2].

(4) 令 $f \in R_a \cap E$, $\forall g \in L_a \cap E$. 因 $aug = agug = ag = a = fa = fufa = fua$, 故 $au \mathscr{R} a \mathscr{L} ua$.

(5), (6) 据 (1) 可得. 证毕.

上述结论看似简单, 却是本文研究得以继续的关键. 它们将在今后论证需要时不经提及地加以应用.

引理 2.6 若 u 和 v 是 S 的弱中间幂等元, 则 uv 仍是弱中间幂等元.

证明 对任意的幂等元 f, 有 $fuv \in E$ 且 $fuv \mathscr{R} f$. 所以 $fuvf = f$. 证毕.

引理 2.7 令 u 为 S 的幂等元, 则下列条件等价:

(1) $(\forall\, e \in E)$, $V_{uSu}(e) \neq \emptyset$;

(2) $(\forall\, x \in S)$, $V_{uSu}(x) \neq \emptyset$.

证明 (1)⇒(2) 若 $s' \in V(s)$, 则 $ss', s's \in E$. 令 $h \in V(ss') \cap uSu$ 和 $g \in V(s's) \cap uSu$. 因有 $sgs'hs = s(s'sgs's)s'hss's = ss'hss's = s$ 和 $gs'hsgs'h = gs'ss'hss'sgs'h = gs'sgs'ss'h = gs'h$ 成立, 故而 $gs'h \in V(s) \cap uSu$.

(2)⇒(1) 是显然的. 证毕.

据该引理, 若 u 是弱中间幂等元, 则对任意的 $x \in S$, $V_{uSu}(x) \neq \emptyset$. 因此

$$I = \{xx^\circ : x \in S,\, x^\circ \in V_{uSu}(x)\} \text{ 和 } \Lambda = \{y^\circ y : y \in S,\, y^\circ \in V_{uSu}(y)\}$$

都是 E 的非空子集.

引理 2.8 如果 u 是 S 的弱中间幂等元, 那么对任意的 $x \in S$, 有

$$V_{uSu}(x) = V_{uSu}(ux) = V_{uSu}(xu) = V_{uSu}(uxu).$$

证明 事实上, 只需验证第一个等式, 其他类似可证. 令 $x' \in V_{uSu}(x)$, 则有 $uxx'ux = uxx'x = ux$ 和 $x'uxx' = x'xx' = x'$. 另外, 设 $y \in V_{uSu}(ux)$, 有

$$yxy = yuxy = y \text{ 和} xyx = xyux = xx'uxyux = xx'ux = xx'x = x.$$

所以, $V_{uSu}(x) = V_{uSu}(ux)$. 证毕.

引理 2.9 如果 u 为 S 的弱中间幂等元, 那么

(1) $I = Eu$;

(2) $\Lambda = uE$;

(3) $I \cap \Lambda = uEu$.

证明 $I \subseteq Eu$ 是显然的. 令 $g \in Eu$, $ug = ugu \in V(g)$, 则 $g = gugu \in I$. 所以有 $Eu = I$. 对偶地, $\Lambda = uE$. 因此, 易知 $I \cap \Lambda \subseteq uEu$. 最后, 因 Eu 和 uE 都是 E 的子集, 故而 $uEu = I \cap \Lambda$. 证毕.

利用引理 2.5 易得弱中间幂等元的两个等价判定.

命题 2.10 令 u 为 S 的幂等元, 则 u 是弱中间幂等元当且仅当对任意的 $e \in E$, 有

$$eu \,\mathscr{R}\, e \,\mathscr{L}\, ue \quad \text{和} \quad ueu \in E.$$

命题 2.11 令 u 为 S 的幂等元, 则 u 是弱中间幂等元当且仅当对任意的 $a \in S$ 和 $a' \in V(a)$, 有 $aua' = aa'$.

弱中间幂等元的其他等价刻画有:

命题 2.12 设 u 为 S 的幂等元, 则下列条件等价:

(1) u 为弱中间幂等元;

(2) $(\forall\, e \in E\ )\ ueu \in V_E(e)$;

(3) $(\forall\, e \in E\ )\ ue \in V(e)$;

(4) $(\forall\, e \in E\ )\ eu \in V(e)$;

(5) $(\forall\, e \in E)$ $V_{uSu}(e) \neq \emptyset$ 且 $ueu \in E$;

(6) $(\forall\, e \in E)$ $V_{uSu}(e) \neq \emptyset$ 且 $ue \in E$;

(7) $(\forall\, e \in E)$ $V_{uSu}(e) \neq \emptyset$ 且 $eu \in E$.

证明 (1)⇒(2), (1)⇒(3), (1)⇒(4), (1)⇒(5), (1)⇒(6), (1)⇒(7) 已证.

(2) ⇒(3) 因 $e(ueu)e=e$, 故 $eu \mathscr{R} e$. 从而, $ueu \mathscr{R} ue$. 于是, 由 $ueu\in E$ 可得 $ue\in E$. 因此有 $e(ue)e=e$ 和 $(ue)e(ue)=ue$. 这就是说 $ue\in V(e)$.

(3)⇒(1) 因对任意的幂等元 e, 有 $e(ue)e=e$, 故 e 是一个弱中间幂等元.

(4)⇒(1) 对任意的 $e\in E$, 有 $e(eu)e=e$.

(5)⇒(1) 设 $x\in V_{uSu}(e)$, 则

$$e=exe=euxue\Rightarrow eu \mathscr{R}\ e \mathscr{L}\ ue.$$

据引理 2.10, u 是弱中间幂等元.

(6)⇒(1), (7)⇒(1) 由前面的证明可知, $V_{uSu}(e)\neq\emptyset\Rightarrow ue \mathscr{L}\ e \mathscr{R}\ eu$. 所以, 据 $ue\in E$ 或 $eu\in E$, $eue=e$. 证毕.

拟中间幂等元必是弱中间幂等元. 而弱中间幂等元能成为拟中间幂等元的条件, 可以从幂等元子集, 可逆元子集以及子半群三个方面进行描述.

命题 2.13 设 u 是 S 的弱中间幂等元. 下列条件等价

(1) u 是拟中间幂等元;

(2) Eu 是幂等元带;

(3) uE 是幂等元带.

证明 (1)⇒(2) 设 $e,f\in E$, 则有 $ueufu\in E$. 从而

$$(eufu)^2=eufueufu=e(ueufu)^2=eueufu=eufu.$$

因此, Eu 是幂等元带.

(2)⇒(1) 设 $e,f\in E$, 则 $eufu\in E$, 于是有

$$(ueufu)^2=ueufueufu=u(eufu)^2u=ueufu.$$

因此, uEu 是幂等元带.

(1)⇔(3) 据上述证明, 类似可得. 证毕.

命题 2.14 设 $u\in E$ 是 S 的弱中间幂等元. 下列结论等价:

(1) u 是拟中间幂等元.

(2) $(s,t\in S)$ $\{s,t\}\cap uSu\neq\emptyset\Rightarrow V_{uSu}(s)V_{uSu}(t)\subseteq V_{uSu}(ts)$;

(3) $(e,f\in E)$ $\{e,f\}\cap uSu\neq\emptyset\Rightarrow V_{uSu}(e)V_{uSu}(f)\subseteq V_{uSu}(fe)$;

(4) $(e,f\in Eu)$ $\{e,f\}\cap uEu\neq\emptyset\Rightarrow V_{uSu}(e)V_{uSu}(f)\subseteq V_{uSu}(fe)$;

(5) $(e,f\in uE)$ $\{e,f\}\cap uEu\neq\emptyset\Rightarrow V_{uSu}(e)V_{uSu}(f)\subseteq V_{uSu}(fe)$.

证明 据结论 (4) 和 (5) 的相似性, 我们只做如下证明即可.

(1)⇒(2) 根据引理 2.8, $V_{uSu}(ts)=V_{uSu}(utsu)=V_{uSu}(utus)$ 且 $V_{uSu}(t)=V_{uSu}(utu)$. 若 $s\in uSu$, 则由 uSu 是纯正半群可得

$$V_{uSu}(s)V_{uSu}(t)=V_{uSu}(s)V_{uSu}(utu)\subseteq V_{uSu}(utus)=V_{uSu}(ts).$$

(2)⇒(3), (3)⇒(4) 是显然的.

(4)⇒(1) 对任意 $g,h\in uEu$, 则 $gh=gh\in V_{uSu}(e)V_{uSu}(f)\subseteq V_{uSu}(hg)$. 于是

$$(gh)^2=gh(hg)gh=gh.$$

这就是说 uEu 是一个幂等元带. 再由题设可知 u 是一个拟中间幂等元. 证毕.

命题 2.15 令 u 为 S 的弱中间幂等元, 则下列条件等价:

(1) u 是拟中间幂等元;

(2) $(\forall e \in Eu, f \in uE)\ fe \in E$;

(3) $(\forall e \in Eu, f \in uE)\ V_{uSu}(fe) \subseteq E$.

证明 (1)⇒(2) 令 $g \in S(e,f)$. 因为有 $ue \in V(e)$ 和 $fu \in V(f)$, 所以

$$uegfu \in V_{uSu}(fe) \cap E.$$

又因 uSu 是一个纯正半群, 故而 $fe \in E$.

(2)⇒(3) 因 $E(uSu) = uEu = Eu \cap uE$, 故对任意的 $g, h \in uEu$, 有 $gh \in E$. 这就是说 uSu 是一个纯正半群. 所以 $fe \in E \cap uSu$ 蕴含 $V_{uSu}(fe) \subseteq E$.

(3)⇒(1) 因 $uEu = E(uSu)$, 故 $V_{uSu}(fe) \subseteq E$ 蕴含 uEu 是幂等元带. 因此, u 是拟中间幂等元. 证毕.

定理 2.16 设 $u \in E$ 是 S 的弱中间幂等元. 下列结论等价:

(1) u 是拟中间幂等元;

(2) 对任意的 $e \in E$, eSe 是纯正子半群;

(3) 对任意的 $e \in E$, eS 是纯正子半群;

(4) 对任意的 $e \in E$, Se 是纯正子半群.

证明 (1)⇔(2) 显然, eSe 是正则子半群. 若 u 是拟中间幂等元, 则 uE 是幂等元带. 任取 $g, h \in E(eSe)$, 有

$$(gh)^2 = (egeh)^2 = euguhuguh = e(uguh)^2 = euguh = gh.$$

因此, eSe 是纯正半群. 反之, uSu 是纯正子半群. 易知, uEu 是幂等元带. 所以, u 是拟中间幂等元.

(1)⇔(3), (1)⇔(4) 根据上述论证及引理 2.13 可得. 证毕.

3 拟中间幂等元

本节将证明一个半群可能存在两个及以上的拟中间幂等元, 且拟中间幂等元构成的集合关于半群运算封闭; 得到一般幂等元能成为拟中间幂等元的充分必要条件; 最后将利用拟中间幂等元给出纯正半群的等价判定.

在此, 我们以若干实例作为本节的开篇.

例 3.1 令 $T_1 = \{e, f, g, h\}$. 在 T 上定义如下运算:

	e	f	g	h
e	e	e	e	e
f	e	f	f	e
g	e	g	g	e
h	e	e	e	h

则 T_1 关于上述运算是一个幂等元带, 但拟中间幂等元不存在.

例 3.2 $T_2 = \{0, 1\}$ 关于数的乘法是一个半格且存在唯一的拟中间幂等元 1.

例 3.3 在集合 $T_3=\{x,e,f,g,h\}$ 上定义如下运算:

	x	e	f	g	h
x	e	e	x	e	g
e	e	e	e	e	e
f	e	e	f	e	h
g	x	e	x	g	g
h	f	e	f	h	h

直接验证可知 T_3 对该运算构成正则半群但不是纯正半群, 且 h 是 T_3 的唯一一个拟中间幂等元.

例 3.4 令 B 为任意矩形带, T_3 为上例所述, 则 $B\times T_3$ 是一个正则半群但不是纯正半群, 且 $B\times\{h\}$ 中每一个元素都是拟中间幂等元. 如果 B 中的元素不唯一, 那么 $B\times T_3$ 的拟中间幂等元也不唯一.

命题 3.5 若 u,v 为 S 的拟中间幂等元, 则 uv 也一个拟中间幂等元.

证明 据命题 2.6, uv 是弱中间幂等元. 任取 $e,f\in E$. 因 uE,Eu 和 vE,Ev 是幂等元带, 故有 $(uveuv)(uvfuv)=uveuvfuv\in uvEuv$. 于是, $uvEuv$ 是一个幂等元带. 所以 uv 是一个拟中间幂等元. 证毕.

接下来考虑一般幂等元能成为拟中间幂等元的充分必要条件.

命题 3.6 令 u 为 S 的幂等元, 则 u 是拟中间幂等元当且仅当

(1) uSu 是 S 的纯正子半群;

(2) $(\forall\, e\in E)$, $V_{uSu}(e)\cap E\neq\emptyset$.

证明 必要性是显然. 关于充分性, 设 $e'\in V_{uSu}(e)\cap E$. 因有

$$e'(ueu)e'=e'ee'=e' \quad 和 \quad (ueu)e'(ueu)=uee'eu=ueu,$$

故 $e'\in V_{uSu}(ueu)\cap E$. 据 (1), $ueu\in E$. 进一步, 可得 $uEu=E(uSu)$ 是一个幂等元带. 所以, 由命题 2.12 可知 u 是拟中间幂等元. 证毕.

命题 3.7 令 u 为 S 的幂等元, 则 u 是拟中间幂等元当且仅当对任意的幂等元 e, $V_{uSu}(e)\subseteq E$.

证明 若 u 是拟中间幂等元, 则 $V_{uSu}(e)=V_{uSu}(ueu)$. 因 uSu 是纯正子半群且 $ueu\in E$, 故有 $V_{uSu}(e)\subseteq E$. 反过来, 据题设, 对任意的 $g\in E(uSu)$, $V_{uSu}(g)\subseteq E$. 这说明 uSu 是纯正子半群. 所以, u 是拟中间幂等元. 证毕.

命题 3.8 令 u 为 S 的幂等元, 则 u 是拟中间幂等元当且仅当

(1) $(\forall\, x\in S)$ $V_{uSu}(x)\neq\emptyset$ (或 $(\forall\, e\in E)$ $V_{uSu}(e)\neq\emptyset$);

(2) $(\forall\, x\in Eu,\ \forall\, y\in uE)$ $V_{uSu}(yx)\subseteq E$.

证明 根据命题 2.15, 必要性立得. 反之, 任取 $e\in E(uSu)$, 有 $V_{uSu}(e)=V_{uSu}(ueu)\subseteq E$. 因此, uSu 是纯正半群且 $ueu\in E$. 容易验证 $uEu=E(uSu)$ 是幂等元带. 最后, 由命题 2.12, u 是拟中间幂等元. 证毕.

称 S 的纯正断面 S° 是可乘的, 如果对任意的 $x,y\in S$, $x^\circ xyy^\circ\in E^\circ$, 其中 E° 是 S° 的幂等元集.

命题 3.9 幂等元 u 是 S 的拟中间幂等元当且仅当 uSu 是 S 的乘纯正断面.

证明 $(\Rightarrow)$ 根据引理 2.9 和命题 2.14, 2.15 可得.

$(\Leftarrow)$ 因为对任意的 $e\in S$ 和 $e^\circ\in V_{uSu}(x)$, $e^\circ=e^\circ ee^\circ=(e^\circ e)(ee^\circ)\in E(uSu)$,故据命题 3.7, u 是拟中间幂等元. 证毕.

令 S° 为 S 纯正断面, 则

$$(\forall\, a,b\in S^\circ)\ V(a)\cap V(b)\neq\emptyset\ \Rightarrow\ V_{S^\circ}(a)=V_{S^\circ}(b).$$

但对于拟中间幂等元, 有

引理 3.10 如果 u 是拟中间幂等元, 那么

$$(\forall\, x,y\in S)\ V(x)\cap V(y)\neq\emptyset\ \Rightarrow V_{uSu}(x)=V_{uSu}(y).$$

证明 假设 $z\in V(x)\cap V(y)$. 据命题 2.11, $z\in V(uxu)\cap V(uyu)$. 所以

$$V_{uSu}(x)=V_{uSu}(uxu)=V_{uSu}(uyu)=V_{uSu}(y).$$

证毕.

第 2 节最后的一个定理证明了一个具有拟中间幂等元的正则半群必然包含纯正子半群, 而开篇的实例却表明这类正则半群不一定是纯正半群. 下面就给出在什么条件具有拟中间幂等元的正则半群必是纯正半群. 为此, 我们先在具有弱中间幂等元的正则半群上引入如下二元关系.

定义 3.11 设 u 是 S 的弱中间幂等元. 对任意的 $x,y\in S$, 规定

$$x\ \widehat{\sigma}\ y\Leftrightarrow V_{uSu}(x)=V_{uSu}(y).$$

显然, $\widehat{\sigma}$ 是一个等价关系.

命题 3.12 若 S 是具有拟中间幂等元 u 的正则半群, 则 S 是纯正半群当且仅当以下任一条件成立:

(1) $(\forall\, x\in S)\ uxu\in E\Rightarrow x\in E$;

(2) $(\forall\, x\in\overline{E})\ uxu\in E\Rightarrow x\in E$;

(3) $(\forall\, e\in Eu,\ \forall\, f\in uE)\ ef\in E$;

(4) $(\forall\, e\in Eu,\ f\in uE)\ fe\in S(e,f)$;

(5) $(\forall\, e\in Eu,\ \forall\, f\in uE)\ V_{uSu}(fue)=V_{uSu}(fe)$;

(6) $(\forall\, x,y\in S)\ V_{uSu}(xy)=V_{uSu}(xuy)$;

(7) $\widehat{\sigma}$ 是 S 上的同余.

证明 首先, 证明条件 (1)–(7) 是等价的.

(1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 因 u 是拟中间幂等元, 故 $uefu\in uEu$. 于是, $ef\in E$.

(3)⇒(4) $fe=(fe)^2\in fV(ef)e\in S(e,f)$.

(4)⇒(5) 据题设, $fue\in E$. 而 $fe\in S(e,f)$ 蕴含 $ef\in E$. 因此, 有 $fue(ef)fue=fue$ 和 $ef(fue)ef=efuefuf=ef$. 所以 $ef\in V(fue)\cap V(fe)$. 于是, 由引理 3.10, $V_{uSu}(fue)=V_{uSu}(fe)$.

(5)⇒(6) 令 $x'\in V_{uSu}(x),y'\in_{uSu}(y)$, 有

$$\begin{aligned}V_{uSu}(xuy)&=V_{uSu}(uxux'xuyy'uyu)\\&\supseteq V_{uSu}(uxu)V_{uSu}(ux'xuyy'u)V_{uSu}(uyu)\end{aligned}$$

和

$$V_{uSu}(xy)=V_{uSu}(uxux'xyy'uyu)\supseteq V_{uSu}(uxu)V_{uSu}(ux'xyy'u)V_{uSu}(uyu)$$

成立. 因 $V_{uSu}(ux'xyy'u) = V_{uSu}(ux'xuyy'u)$, 故 $V_{uSu}(xy) \cap V_{uSu}(xuy) \neq \emptyset$. 所以 $V_{uSu}(xy) = V_{uSu}(xuy)$ 得证.

(6)⇒(7) 令 $z \in S$, 有

$$V_{uSu}(xz) = V_{uSu}(xuz) = V_{uSu}(uxuz) \supseteq V_{uSu}(z)V_{uSu}(uxu).$$

同样地, 有 $V_{uSu}(yz) \supseteq V_{uSu}(z)V_{uSu}(uyu)$. 若 $x \mathrel{\widehat{\sigma}} y$, 则 $V_{uSu}(x) = V_{uSu}(y)$. 因此, 有 $V_{uSu}(uxu) = V_{uSu}(uyu)$. 于是, $V_{uSu}(xz) \cap V_{uSu}(yz)$. 从而, $V_{uSu}(xz) = V_{uSu}(yz)$, 即 $xz \mathrel{\widehat{\sigma}} yz$. 类似可得 $zx \mathrel{\widehat{\sigma}} zy$. 所以 $\widehat{\sigma}$ 是一个同余.

(7)⇒(1) 据引理 2.8, 对任意的 $x \in S$, $V_{uSu}(x) = V_{uSu}(uxu)$, 即 $uxu \mathrel{\widehat{\sigma}} x$. 因 $\widehat{\sigma}$ 是同余, 故由 $uxu \in E$ 可得 $x \mathrel{\widehat{\sigma}} uxu = (uxu)^2 \mathrel{\widehat{\sigma}} x^2$. 由此 $V_{uSu}((x)^2) \cap V_{uSu}(x)$. 令 $y \in V_{uSu}((x))$. 因此 $x^2 = x(yx^2y)x = xyx = x \in E$.

其次, 证明 S 是纯正半群当且仅当条件 (1) 成立.

(⇒) 令 $x' \in V(x)$. 因 u 是拟中间幂等元, 故据命题 2.11, $xux' = xx'$. 又因 S 是纯正半群, 故而有 $x = xx'x = (xx')uxu(x'x) \in E$.

(⇐) 任取 $e, f \in E$, 因 u 是拟中间幂等元, 故由命题 2.5 和 2.15, $uefu \in E$. 若条件 (1) 成立, 则 $ef \in E$. 所以, S 是纯正半群. 证毕.

回顾本节给出的几个例子, 可以发现那些拟中间幂等元也都是中间幂等元. 事实上, 这种现象并不是偶然的.

引理 3.13 若 u 为 S 的拟中间幂等元, 则 $E^2 = \overline{E}$.

证明 只需验证 E^2 是 S 的子半群. 现设 $x, y \in E^2$, 则存在 $e_1, e_2, f_1, f_2 \in E$ 使得 $x = e_1e_2$ 和 $y = f_1f_e$. 据命题 2.15 (2), $ue_1e_2ue_2f_1uf_1u \in uEu$. 因 Eu 是一个幂等元带, 故而有 $e_1u(ue_1e_2ue_2f_1uf_1u) \in E$. 于是

$$xy = e_1u(ue_1e_2ue_2f_1uf_1u)f_2 \in E^2.$$

证毕.

定理 3.14 若 u 是 S 的拟中间幂等元, 则 u 必是 S 的中间幂等元; 反之, 若 u 是 S 的中间幂等元, 则 u 必是 S 的拟中间幂等元.

证明 (1)⇒(2) 根据上述引理, 只需证对任意的 $e, f \in E$, 有 $efuef = ef$. 实际上, 已知 $ef \mathrel{\mathscr{R}} efu \mathrel{\mathscr{L}} uefu$ 和 $uefu \in E$, 所以

$$efu(uefu) = efu \Rightarrow efu \in E \Rightarrow efuef = ef.$$

(2)⇒(1) 显然, 中间幂等元是一个弱中间幂等元. 又根据中间幂等元的定义, 对任意的 $x \in \overline{E}$, $uxu \in E$. 于是, 任取 $e, f \in E$, 有 $ueufu \in E$. 这就说 uEu 是一个幂等元带. 所以, u 是拟中间幂等元. 证毕.

根据该定理, 今后不再区分拟中间幂等元和中间幂等元.

4 结构定理

在文 [8] 中, 作者以含有中间幂等元的由幂等元集生成的正则半群与一个纯正半群为要素, 给出了具有中间幂等元的纯正半群的结构. 而一个很自然的问题是含有中间幂等元的由幂等元集生成的正则半群的结构如何描述. 本节旨在利用上一节得到的研究结果, 给出一般的具有中间幂等元的正则半群的结构刻画. 而它的相关应用留待下一节进行讨论.

令 G 为含左单位元 u 的纯正半群, $E(G)$ 为其幂等元集; I 是以 u 为右单位元的幂等元带且满足 $E(Gu)\cong uI$. 为方便, 假定 $E(Gu)=uI$, 简记为 $\widehat{E}$. 又记 $I/\mathscr{R}=\{R_e: e\in I\}$ 为 I 关于格林 $\mathscr{R}$ 关系的集合分类. 若有映射 $\star: G\times I\to Gu$, $(s,i)\mapsto s\star i$ 满足条件:

(W1) $(\forall x\in G, j\in I)$, $(xs)\star i=x(s\star i)$ 且 $(x\star i)j=x\star(ij)$;

(W2) $i\in\widehat{E}\Rightarrow s\star i=si$;

(W3) $s\in E(G)\Rightarrow s\star i\in\widehat{E}$,

则称 $W(I,G)=\{(R_e,x)\,|\,ue\ \mathscr{R}\ x\}$ 是相容二元组.

$W(I,G)$ 中元素的定义与 e 的选取无关. 这是因为如果另取 $g\in R_e$, 那么 $ug\ \mathscr{R}\ ue\ \mathscr{R}\ x$.

在 $W(I,S)$ 上定义乘法运算:

$$(R_e,x)(R_f,y)=(R_{e(x\star f)^+},(x\star f)y),$$

其中 $(x\star f)^+\in R_{x\star f}\cap\widehat{E}$.

因 $ue\ \mathscr{R}\ x$, 故 $ue(x\star f)=x\star f=(x\star f)uf$. 又因 $uf\ \mathscr{R}\ y$, 故而

$$ue(x\star f)^+=(x\star f)^+\ \mathscr{R}\ x\star f=(x\star f)uf\ \mathscr{R}\ (x\star f)y.$$

因此 $(R_{e(x\star f)^+},(x\star f)y)\in W(I,G)$. 另外, 若 $h\in R_{x\star f}\cap\widehat{E}$, 则由 R 的左相容性可知, $R_{e(x\star f)^+}=R_{eh}$. 所以, 上述乘法定义是合理的.

以下的叙述中常记 $W(I,G)$ 为 W.

命题 4.1 W 关于上述乘法构成一个正则半群.

证明 先证 W 是一个半群. 任取 $(R_e,x),(R_f,y),(R_g,z)\in W$, 有

$$\begin{aligned}[(R_e,x)(R_f,y)](R_g,z)&=(R_{e(x\star f)^+},(x\star f)y)(R_g,z)\\&=\big(R_{e(x\star f)^+(((x\star f)y)\star g)^+},(((x\star f)y)\star g)z\big)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(R_e,x)[(R_f,y)(R_g,z)]&=(R_e,x)(R_{f(y\star g)^+},(y\star g)z)\\&=\big(R_{e(x\star(f(y\star g)^+))^+},(x\star(f(y\star g)^+))(y\star g)z\big).\end{aligned}$$

据 $(W1)$, $((x\star f)y)\star g=(x\star f)(y\star g)$ 且 $x\star(f(y\star g)^+)=(x\star f)(y\star g)^+$. 由此 $(x\star f)^+(((x\star f)y)\star g)^+=((x\star f)(y\star g))^+$. 于是有

$$[(R_e,x)(R_f,y)](R_g,z)=(R_e,x)[(R_f,y)(R_g,z)].$$

其次, 验证 W 是一个正则半群. 任取 $x\in G$. 令 $x'\in G$ 是 x 任意逆元. 容易验证 $x'u\in V(x)\cap V(xu)$ 和 $x'\in V(xu)$. 下证 $(R_{x'xu},x'u)$ 是 (R_e,x) 的逆元. 事实上, 有 $x'xu\in\widehat{E}$ 和 $x'xu=ux'xu=x'uxu\ \mathscr{R}\ x'u$. 故 $(R_{x'xu},x'u)\in W$. 另外, 由 $ue\ \mathscr{R}\ xx'u$ 和 $xx'ue\in R_{(xx'ue)^+}$, 可得

$$\begin{aligned}(R_{x'xu},x'u)(R_e,x)(R_{x'xu},x'u)&=(R_{x'xu(x'ue)^+},x'uex)(R_{x'xu},x'u)\\&=(R_{(x'ue)^+},x'x)(R_{x'xu},x'u)\\&=(R_{(x'ue)^+(x'xu)^+},x'u)\\&=(R_{(x'ue)^+(x'uexu)^+},x'u)\\&=(R_{(x'xu)^+},x'u)=(R_{x'xu},x'u)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(R_e,x)(R_{x'xu},x'u)(R_e,x)&=(R_{e(xu)^+},xx'u)(R_e,x)\\&=(R_{e(xu)^+xx'ue},xx'uex)\\&=(R_{eue},x)=(R_e,x).\end{aligned}$$

证毕.

命题 4.2 正则半群 W 的幂等元集 $E(W)=\{(R_e,x)\in W\,|\,x\star e=ue\}$.

证明 任取 $(R_e,x)\in E(W)$, 则由 $(R_e,x)(R_e,x)=(R_e,x)$ 可得 $(x\star e)x=x$. 因 $ue\,\mathscr{R}\,x$, 故 $(x\star e)ue=ue$. 从而 $ue=x\star(eue)=x\star e$. 反之, 由幂等元的定义可得. 证毕.

命题 4.3 记 $\overline{u}=(R_u,u)$, 则 $\bar{u}W\bar{u}$ 是一个纯正子半群, 且

$$\bar{u}W\bar{u}=\{(R_{x^+},x)\,|\,x\in Gu,\,x^+\in R_x\cap\widehat{E}\}.$$

证明 任取 $(R_e,x)\in W$, 则 $\bar{u}(R_e,x)\bar{u}=(R_{(xu)^+},xu)$, 其中 $(xu)^+\in R_{xu}\cap\widehat{E}$. 而对任意 $x\in Gu$, 令 $x^+\in R_x\cap\widehat{E}$, 则 $(R_{x^+},x)\in W$ 且 $(R_{x^+},x)=\bar{u}(R_{x^+},x)\bar{u}$. 因此 $\bar{u}W\bar{u}=\{(R_{x^+},x)\in W\,|\,x\in Gu\}$ 为证其是纯正子半群, 作映射 $\phi:Gu\to\bar{u}W\bar{u}$, $x\mapsto(R_{x^+},x)$. 易知, ϕ 是一个双射. 又因 $\phi(x)\phi(y)=(R_{x^+},x)(R_{y^+},y)=(R_{(xy^+)^+},xy)=(R_{(xy)^+},xy)=\phi(xy)$, 故而 ϕ 是 Gu 到 $\bar{u}W\bar{u}$ 的同构. 所以, 由 Gu 为纯正半群可得 $\bar{u}W\bar{u}$ 亦为纯正半群. 证毕.

命题 4.4 幂等元 $\bar{u}$ 是正则半群 W 的中间幂等元.

证明 显然, $\bar{u}$ 是一个幂等元. 任取 $(R_e,x)\in E(W)$, 则 $x\star e=ue$. 令 $x^*\in L_x\cap E(G)$. 那么有 $(x\star e)=x(x^*\star e)x=x$. 据条件 (W3), 有 $x^*\star e\in E(G)$. 因 G 是一个纯正半群, 故而 $x\in E(G)$. 令 $x'\in V(x)\cap E(G)$. 易知, $x'u,x'xu\in\widehat{E}$. 因此

$$(x'u)\star(x'xu)=x'xu=u(x'xu)\Rightarrow(R_{x'xu},x'u)\in E(W).$$

另外, 由命题 4.1 的证明过程可得 $(R_{x'xu},x'u)\in V((R_e,x))$. 最后, 据命题 4.3, 3.14 和推论 3.6, 得证 $\bar{u}$ 是 W 的中间幂等元. 证毕.

定理 4.5 令 G 含左单位元的纯正半群, I 是含右单位元的幂等元带. 相容二元集 $W(I,G)$ 是含有中间幂等元的正则半群; 而任意含有中间幂等元的纯正半群都可如此构造.

证明 定理的前半部分已经论证过. 设 S 为任意含有中间幂等元 u 的正则半群, E 是 S 的幂等元集, 则 uS 是纯正子半群, Eu 是幂等元带且 $uEu=E(uSu)$. 令 $\star:uS\times Eu\to uSu$, $(s,i)\mapsto s\star i=si$. 由中间幂等元的性质易知 $W(Eu,uS)$ 是相容二元组. 为证 $S\cong W(Su,uE)$, 作映射

$$\theta:S\to W(Eu,uS),\quad s\mapsto(R_{s^+u},us)\ \ \text{和}\ \ \eta:W(Eu,uS)\to S,\quad(R_e,x)\mapsto ex.$$

容易验证, θ 和 η 都是同态映射. 另外, 对任意 $(R_e,x)\in W(Eu,uS)$, 因 u 是中间幂等元, 故 e 和 x 的格林关系如下蛋壳图:

ex	e
x	ue

显然, $(ex)^+u\,\mathscr{R}\,(ex)^+\,\mathscr{R}\,ex$, 其中 $(ex)^+\in R_{ex}\cap E$. 于是

$$\theta\eta\left((R_e,x)\right)=\theta(ex)=(R_{(ex)^+u},uex)=(R_e,x).$$

又因有 $\eta\theta(s)=\eta\left((R_{s^+u},us)\right)=s$, 所以 η 和 θ 是同构. 证毕.

5 应用

首先, 本节利用定理 4.3, 更详尽地描述具有中间幂等元且由幂等元生成的正则半群和具有正规幂等元的正则半群的构造方法. 其次, 利用所得结论证明了乘逆断面的存在性可以通过正规幂等元来判定.

引理 5.1 如果 S 是具有中间幂等元 u 的正则半群, 那么

$$S=\overline{E}\Longleftrightarrow S=\{x\in S: uxu\in E\}.$$

证明 $(\Rightarrow)$ 由中间幂等元的定义可得.

$(\Leftarrow)$ 若 $uxu\in E$, 令 $x^+\in R_x\cap E$, $x^*\in L_x\cap E$, 则 $x=x^+uxux^*\in\overline{E}$. 证毕.

引理 5.2 若 $W(I,G)$ 是相容二元组, 则

(1) $\overline{E(W)}=\{(R_e,x)\in W\,|\,x\in E(G)\}$;

(2) $E(W)\bar{u}\cong I$;

(3) $\bar{u}W\cong G$.

证明 (1) 任取 $(R_e,x)\in W$, 有 $(R_e,x)=(R_e,ue)(R_{ue},x)$. 若 $x\in E(G)$, 则据命题 4.2, $(R_e,ue),(R_{ue},x)\in E(W)$. 反之, 若 $(R_e,x)\in\overline{E(W)}$, 则

$$\bar{u}(R_e,x)\bar{u}=(R_{(xu)^+},xu)\in E(W).$$

从而 $xu\in E$. 又因对任意的 $x^*\in R_x\cap E(G)$, $x=xux^*$ 蕴含 $x\,\mathscr{R}\,xu$, 故而 $x^2=xux=x$.

(2) 首先, 验证 $E(W)\bar{u}=\{(R_e,ue)\,|\,\forall e\in I\}$. 若 $(R_e,x)\in E(W)$, 则 $(R_e,x)(R_u,u)=(R_{e(xu)^+},xu)\in\overline{E(W)}$. 因 $xu\in\widehat{E}$, 故 $(R_{e(xu)^+},xu)=(R_{e(xu)},xu)$. 又因 $ue\,\mathscr{R}\,x$, 故而 $ue(xu)=(uex)u=xu$. 所以 $(R_{e(xu)^+},xu)=(R_{e(xu)},ue(xu))$. 反过来, 因 $(R_e,ue)\in E(W)$, 故

$$(R_e,ue)=(R_e,ue)(R_u,u)\in E(W)\bar{u}.$$

现作映射 $\phi: I\to E(W)\bar{u}$, $e\mapsto(R_e,ue)$ 易证, ϕ 是同构, 即有 $E(W)\bar{u}\cong I$.

(3) 任取 $(R_e,x)\in W$. 由 $(R_u,u)(R_e,x)=(R_{ue},x)$, 可知

$$\bar{u}W=\{(R_g,x)\in W\,|\,x\,\mathscr{R}\,g\in\widehat{E}\}.$$

作映射 $\theta: G\to\bar{u}W$, $x\mapsto(R_g,x)$. 通常验证可得 θ 是同构, 从而 $\bar{u}W\cong G$. 证毕.

命题 5.3 相容二元组 $W(I,G)$ 是由幂等元集生成的具有中间幂等元的正则半群当且仅当 G 是一个幂等元带.

证明 已知 $\bar{u}W\cong G$. 若 $W=\overline{E(W)}$, 则因 $\bar{u}$ 是中间幂等元, $\bar{u}W=\overline{E(W)}$ 是幂等元带. 于是, G 也是一个幂等元带. 反之, 若 G 是幂等元带, 则据命题 5.2(1), $W=\overline{E(W)}$. 证毕.

命题 5.4 相容二元集 $W(I,G)$ 是含有正规幂等元的正则半群当且仅当 I 是左正规带且 G 是右逆半群.

证明 $(\Leftarrow)$ 因 $\bar{u}$ 是中间幂等元, 故 $\bar{u}\overline{E(W)}\bar{u}=\bar{u}E(W)\bar{u}$. 下证 $\bar{u}E(W)\bar{u}$ 是半格.

令 $(R_e,x),(R_f,y)\in E(W)$, 则有 $x,y\in E(G)$, $x\star e=ue$ 和 $f\star f=uf$. 于是, $xu,yu\in\widehat{E}$. 据此, 有 $\bar{u}(R_e,x)\bar{u}=(R_{xu},xu)$ 和 $\bar{u}(R_f,y)\bar{u}=(R_{yu},yu)$. 由 I 是左正规带且 G 是右逆半群可知 $\widehat{E}$ 是半格. 因此

$$(R_{xu},xu)(R_{yu},yu)=(R_{xuyu},xuyu)=(R_{yuxu},yuxu).$$

这就是说

$$(\bar{u}(R_e,x)\bar{u})\,(\bar{u}(R_f,y)\bar{u}) = (\bar{u}(R_f,y)\bar{u})\,(\bar{u}(R_e,x)\bar{u})\,.$$

所以, 得证 $\bar{u}E(W)\bar{u}$ 是一半格, 而 $\bar{u}$ 是正规幂等元.

($\Rightarrow$) 若 $\bar{u}=(R_u,u)$ 是 W 的正规幂等元, 则 $E(W)\bar{u}$ 是左正规带且 $\bar{u}W$ 是右逆半群. 据命题 5.2, I 是左正规带且 G 是右逆半群. 证毕.

注 1　当 I 是左正规带时对任意的 $e\in I$, $|R_e|=1$. 此时, $W(I,G)=\{(e,x): ue\ \mathscr{R}\ x\}$.

定理 5.5　如果 S 是一个正则半群, 那么 S 含有乘逆断面当且仅当 S 可以作为理想嵌入到具有正规幂等元的正则半群.

为了证明该定理, 我们需要一些准备工作.

引理 5.6　假设 S 是具有正规幂等元 u 的正则半群. 若 T 是 S 的一个理想, 则 uTu 是 T 的乘逆断面.

证明　令 S,u,T 如题所设. 易知, $uTu(\subseteq uSu)$ 是 T 的拟理想, uSu 是乘逆断面, 则 uTu 是逆半群, 且对任意 $t\in T$, $t^\circ=t^\circ tt^\circ$ 蕴含 $t^\circ\in uTu$. 又因对任意的 $x\in T$, $x^\circ xtt^\circ\in uEu\cap T$, 故而 uTu 是 T 的乘逆断面. 证毕.

此处之后, 常设 S 为具有乘逆断面 S° 的正则半群, E 和 E° 是它们的幂等元集, 则对任意的 $x,y\in S$, x°,y° 为 x,y 在 S° 中的唯一逆元. 据文 [2],

$$\begin{aligned}&(x^{\circ\circ})^\circ=x^\circ,\quad x^\circ xyy^\circ\in E^\circ,\\&I=\{xx^\circ:x\in S\}=\{i\in E: i\ \mathscr{L}\ i^*\in E^\circ\},\\&\Lambda=\{y^\circ y: y\in S\ \}=\{\lambda\in E:\lambda\ \mathscr{L}\ \lambda^+\in E^\circ\}.\end{aligned}$$

易知, 对任意的 $i\in I$ 和 $\lambda\in\Lambda$, 有 $i\ \mathscr{L}\ i^\circ\in E^\circ$ 和 $\lambda\ \mathscr{R}\ \lambda^\circ\in E^\circ$.

引理 5.7　对任意的 $x,y\in S$, 有

(1)　$(xy)^\circ=y^\circ x^\circ xyy^\circ x^\circ$;

(2)　$xy(xy)^\circ=xyy^\circ x^\circ$;

(3)　$(xy)^{\circ\circ}=x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ y^{\circ\circ}$;

(4)　$(xy)^{\circ\circ}(xy)^\circ xy=x^{\circ\circ}x^\circ xy$.

证明　直接验证即可.

令 u 为异于 S 中所有元素的字母. 记 $\bar{I}=I\cup\{u\}$. 在 $\bar{I}$ 上定义运算:

$$i\cdot j=\begin{cases}ij, & i,j\in I;\\ i, & j=u;\\ j^\circ, & i=u;\\ u, & i,j=u.\end{cases}$$

又令 $G=S^\circ S$, 而 $\overline{G}=G\cup\{u\}$. 类似地,

$$x\cdot y=\begin{cases}xy, & x,y\in G;\\ xx^\circ x^{\circ\circ}, & y=u;\\ y, & x=u;\\ u, & x,y=u.\end{cases}$$

引理 5.8 $(\bar{I},\cdot)$ 是以 u 为右单位元的左正规带.

证明 首先验证 $\bar{I}$ 关于运算 $\cdot$ 满足结合律. 假设 $i,j,k\in\bar{I}$. 分以下情况讨论:

(1) $k=u$ 时, $(i\cdot j)\cdot u=i\cdot j=i\cdot(j\cdot u)$.

(2) $j=u$ 但 $i,k\neq u$ 时, $(i\cdot u)\cdot k=i\cdot k=ik=ikk^\circ=ik^\circ k=ik^\circ=i\cdot(u\cdot k)$ 因 I 是左正规带.

(3) $i=u$ 但 $j,k\neq u$ 时, $(u\cdot j)\cdot k=j^\circ k=(jk)^\circ=u\cdot(jk)$ 因 $jk\ \mathscr{L}\ j^\circ k\in E^\circ$.

(4) $i=j=u$ 但 $k\neq u$ 时, $(u\cdot u)\cdot k=u\cdot k=k^\circ=u\cdot k^\circ=u\cdot(u\cdot k)$.

(5) $i,j,k\neq u$ 时, 结论显然成立.

对照上述情况证明 $(\bar{I},\cdot)$ 是左正规带, 即 $ijk=ikj$.

(1′) $k=u$ 时, $i\cdot j\cdot u=ij=i\cdot u\cdot j$.

(2′) $j=u$ 但 $i,k\neq u$ 时, $i\cdot u\cdot k=ik=i\cdot k\cdot u$.

(3′) $i=u$ 但 $j,k\neq u$ 时, 因 $jk(k^\circ j)=jk$ 和 $k^\circ j(jk)=k^\circ kj=k^\circ j$, 故 $j^\circ k\ \mathscr{L}\ jk\ \mathscr{L}\ k^\circ j\in E^\circ$. 于是

$$(u\cdot j)\cdot k=j^\circ k=j^\circ kjk=j^\circ kj=j^\circ kk^\circ j=j^\circ k^\circ j=k^\circ j^\circ j=k^\circ j=u\cdot(jk).$$

(4′) $i=j=u$ 但 $k\neq u$ 时, $u\cdot u\cdot k=u\cdot k=k^\circ=u\cdot k\cdot u$.

(5′) $i,j,k\neq u$ 时, 结论成立. 证毕.

引理 5.9 $(\overline{G},\cdot)$ 是以 u 为左单位元的右逆半群.

证明 证明思路与上述引理相似. 先验证结合律. 任取 $x,y,z\in\overline{G}$.

(1) $x=u$ 时, $(u\cdot y)\cdot z=y\cdot z=u\cdot(y\cdot z)$.

(2) $y=u$ 但 $x,z\neq u$ 时, $(x\cdot u)\cdot z=xx^\circ x^{\circ\circ}z=xx^\circ x^{\circ\circ}x^\circ xzz^\circ z=xz=x\cdot(u\cdot z)$, 这是因为 $x^\circ x,zz^\circ\in\Lambda$ 且 Λ 为右正规带.

(3) $z=u$ 但 $x,y\neq u$ 时, $yy^\circ\in E^\circ$. 据引理 5.7,

$$\begin{aligned}(x\cdot y)\cdot u&=xy(xy)^\circ(xy)^{\circ\circ}\\&=xy(y^\circ x^\circ xyy^\circ x^\circ)(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ y^{\circ\circ})\\&=xyy^\circ y^{\circ\circ}=x\cdot(y\cdot u).\end{aligned}$$

(4) $x\neq u$ 但 $y=z=u$ 时, 因 $xx^\circ x^{\circ\circ}\in S^\circ$, 故 $(xx^\circ x^{\circ\circ})^{\circ\circ}=xx^\circ x^{\circ\circ}$. 所以

$$\begin{aligned}(x\cdot u)\cdot u=(xx^\circ x^{\circ\circ})\cdot u&=xx^\circ x^{\circ\circ}(xx^\circ x^{\circ\circ})^\circ(xx^\circ x^{\circ\circ})^{\circ\circ}\\&=xx^\circ x^{\circ\circ}(xx^\circ x^{\circ\circ})^\circ xx^\circ x^{\circ\circ}\\&=xx^\circ x^{\circ\circ}=x\cdot u=x\cdot(u\cdot u).\end{aligned}$$

(5) $x,y,z\neq u$ 时, 结论显然成立.

要证明 $(\overline{G},\cdot)$ 是右逆半群, 只需验证 $E(\overline{G})$ 是右正规带. 事实上, $E(\overline{G})=\Lambda\cup\{u\}$, 且对任意 $\tau,\lambda\in E(\overline{G})$,

$$\tau\cdot\lambda=\begin{cases}\tau\lambda, & \tau,\lambda\in\Lambda;\\ \lambda, & \tau=u;\\ \tau^\circ, & \lambda=u;\\ u, & \tau,\lambda=u.\end{cases}$$

因此, 类似于上一引理的证明可得 $E(\overline{G})$ 是右正规带. 证毕.

引理 5.10 $W(\bar{I},\overline{G})$ 是相容二元组.

证明 据 $\bar{I}$ 和 $\overline{G}$ 的定义, $u\cdot\bar{I}=E^\circ\cup\{u\}$ 且 $\overline{G}\cdot u=S^\circ\cup\{u\}$. 从而 $u\cdot\bar{I}=E(\overline{G}\cdot u)$. 令

$$\star:\overline{G}\times\bar{I}\to\overline{G}\cdot u,\ (x,e)\mapsto x\star e=\begin{cases}xe, & x,\ e\neq u;\\ x\cdot e, & x=u \text{ 或 } e=u.\end{cases}$$

任取 $y\in\overline{G}$, $f\in\bar{I}$. 为证运算 $\star$ 满足条件 $(W1)$, 即

$$x\cdot(y\star e)=(x\cdot y)\star e \quad \text{和} \quad (x\star f)\cdot e=x\star(f\cdot e),$$

分以下情况讨论:

(i) 若 $x,y,e,f\neq u$ 或 $x,y,e,f=u$, 则结论显然成立.

(ii) 若 $x=u$, 则因 u 是 $\overline{G}$ 的左单位元, $u\cdot(y\star e)=y\star e=(u\cdot y)\star e$, 且

$$(u\star f)\cdot e=(u\cdot f)\cdot e=u\cdot(f\cdot e)=u\star(f\cdot e).$$

(iii) 若 $e=u$, 则 $x\cdot(y\star u)=x\cdot(y\cdot u)=(x\cdot y)\cdot u=(x\cdot y)\star u$. 又因 u 是 $\bar{I}$ 的左单位元, 故而

$$(x\star f)\cdot u=x\star f=x\star(f\cdot u).$$

(iv) 若 $y,f=u$ 但 $x,e\neq u$, 则因 I 是左正规带而 Λ 是右正规带,

$$(x\cdot u)\star e=(x\cdot u)e=xx^\circ x^{\circ\circ}ee^\circ=xx^\circ x^{\circ\circ}e^\circ e=xx^\circ x^{\circ\circ}e^\circ,$$
$$x\cdot(u\star e)=xe^\circ=xx^\circ x^{\circ\circ}x^\circ xe^\circ=xx^\circ xx^\circ x^{\circ\circ}e^\circ=xx^\circ x^{\circ\circ}e^\circ.$$

所以 $(x\cdot u)\star e=x\cdot(u\star e)$.

类似可证运算 $\star$ 满足条件 (W2), (W3). 证毕.

引理 5.11 $W(\bar{I},\overline{G})=\{(xx^\circ,x^{\circ\circ}x^\circ x):x\in S\}\cup\{(u,u)\}$.

证明 若 $(e,s)\in W(\bar{I},\overline{G})$, 则 $e,s\neq u$ 或 $e=s=u$. 如果是前者, 注意到 $e\mathscr{L}e^\circ\mathscr{R}s$. 根据引理 5.5, 有 $e=es(es)^\circ$ 和 $(es)^{\circ\circ}(es)^\circ es=s$. 因此

$$(e,s)=(es(es)^\circ,(es)^{\circ\circ}(es)^\circ es).$$

反之, 显然有

$$(u,u)\in W(\bar{I},\overline{G}).$$

又因 $u\cdot(xx^\circ)=(xx^\circ)^\circ=x^{\circ\circ}x^\circ\ \mathscr{R}\ x^{\circ\circ}x^\circ x$, 故而

$$(xx^\circ,x^{\circ\circ}x^\circ x)\in W(\bar{I},\overline{G}).$$

证毕.

现在回到定理 5.5 的证明.

证明 充分性由引理 5.6 可得. 下证必要性. 令 S 为具有乘逆断面 S° 的正则半群, 则 I 是左正规带, $G=S^\circ S$ 必为右逆半群. 记

$$I\otimes G=\{(xx^\circ,x^{\circ\circ}x^\circ x):\ x\in S\}.$$

在该集合上定义乘法运算:

$$(xx^\circ,x^{\circ\circ}x^\circ x)(yy^\circ,y^{\circ\circ}y^\circ y)=(xyy^\circ x^\circ,x^{\circ\circ}x^\circ xy).$$

作映射

$$\phi : S \to I \otimes G,\ x \mapsto (xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x).$$

利用引理 5.7, 容易验证 ϕ 是同构, 即 $S \cong I \otimes G$. 现设 $(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)^+ \in R_{x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ} \cap E^\circ$, 则

$$\begin{aligned} xx^\circ(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)^+ &= xx^\circ(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)^\circ \\ &= xx^\circ(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)(x^\circ xyy^\circ x^\circ) \\ &= xyy^\circ x^\circ. \end{aligned}$$

因此

$$(xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x)(yy^\circ, y^{\circ\circ}y^\circ y) = \left(xx^\circ(x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)^+, (x^{\circ\circ}x^\circ xyy^\circ)y^{\circ\circ}y^\circ y\right).$$

于是, 据引理 5.11, 存在 $I \otimes G$ 到 $W(\bar{I}, \overline{G})$ 的同态嵌入:

$$\theta : I \otimes G \to\ W(\bar{I}, \overline{G}),\quad (xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x) \mapsto (xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x).$$

进一步, 有 S 到 $W(\bar{I}, \overline{G})$ 的同态嵌入 $\phi\theta$. 另外

$$\begin{aligned} (u,u)(xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x) &= (u \cdot (u \cdot xx^\circ)^+, (u \cdot xx^\circ)x^{\circ\circ}x^\circ x) \\ &= (u \cdot (x^{\circ\circ}x^\circ)^+, (x^{\circ\circ}x^\circ)x^{\circ\circ}x^\circ x) \\ &= (u \cdot (x^{\circ\circ}x^\circ), (x^{\circ\circ}x^\circ)x^{\circ\circ}x^\circ x) \\ &= (x^{\circ\circ}x^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x) \in W(\bar{I}, \overline{G}). \end{aligned}$$

由此

$$(u,u)(xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x) \in I \otimes G.$$

类似地

$$(xx^\circ, x^{\circ\circ}x^\circ x)(u,u) \in I \otimes G.$$

最后, 据定理 5.10, 必要性得证.

致谢 感谢审稿人给予的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Blyth T. S., McFadden R., Naturally ordered regular semigroups with a greastest idempotent, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1981, **91A**: 107–122.

[2] Blyth T. S., McFadden R., Regular semigroups with a multiplicative inverse transversal, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh,* 1982, **92A**: 253–270.

[3] Blyth T. S., McFadden R., On the construction of a class of regular semigroups, *J. Algebra*, 1983, **81**: 1–22.

[4] Chen J. F., On regular semigroups with orthodox transversals, *Commun. Agebra,* 1999, **27**(9): 4275–4288.

[5] Guo X. J., Shum K. P., Abundant semigroups with Q-adequate transversals and some of their special cases, *Algebra Colloquium,* 2007, **14**(4): 687–704.

[6] Guo X. J., The structure of abundant semigroups with a weak normal idempotent (in Chinese), *Acta. Mathematics Sinica*, 1999, **42**(4): 683–690.

[7] Howie J. M., Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[8] Longanathan M., Regular semigroups with a medial idempotent, *Semigroup Forum*, 1987, **36**: 69–74.