第三章

一元流体动力学基础

本章学习重点：

- 理解欧拉法描述流体运动的有关概念；
- 掌握流体动力学方程：

连续性方程、能量方程和动量方程。

§3—1　描述流体运动的两种方法

一、拉格朗日(*Lagrange*)法 ← 质点系法

1、研究方法 ——从每一个流体质点的运动情况开始研究，进而得出整 个流体的运动规律。“跟踪”的描述方法。

2、表达式：

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \end{cases}$$

其中：

a，b，c，t——被称作拉格朗日变量。

讨论：

（1）当 a、b、c 为变量，t 为定量时，表示各质点在某时刻的空间分布情况；

（2）当 a、b、c 为定量，t 为变量时，表示某一质点在一段时间内的运动轨迹；

（3）当 a、b、c、t 均为变量时，表示任一时刻、任一质点的运动情况。

3、研究对象

质点

4、拉格朗日法的优、缺点：

优点

此法概念清楚，只要确定了流体的运动规律（即空间坐标表达式），即可求得加速度，从而利用牛顿第二定律建立起作用于 该 质点的力的关系式。

缺点

实际运用困难，在工程中无大的实际意义。因为我们关心的是流体的宏观运动，故一般采用下 面的欧拉法。

二、欧拉（Euler)法 ← 流场法

1、研究方法

——在流场中任取固定位置，研究流体通过该固定点时的运动情况。此法是以大量的流体分子作研究对象。

流场——流体运动时所占据的空间。

此法通过在流场中取足够多的固定空间点，将所有流经此点的流体质点运动情况作综合分析，从而得出整个流体的运动情况。

2、表达式：

（1）压强场： $p = p(x, y, z, t)$

（2）密度场： $\rho = \rho(x, y, z, t)$

（3）速度场： $\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$

x，y，z，t —欧拉变量

讨论：

1> 当 x，y， z 一定，t 为变量时，表示任意时刻质点通过某固定点时的速度变化情况；

2> 当 x，y，z 为变量，t 一定时，表示某时刻整个流场内质点速度的分布情况；

3> 当 x，y， z，t 均为变量时，表示任意时刻、整个流场的速度变化情况。

（4）加速度场：

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \boxed{\frac{\partial u_x}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z}$$

$$a_y = \frac{du_y}{dt} = \boxed{\frac{\partial u_y}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial u_y}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z}u_z}$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \boxed{\frac{\partial u_z}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial u_z}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z}$$

当地加速度（时变导数）：表示流体通过某固定点时速度随时间的变化率。

迁移加速度（位变导数）：表示某一时刻流体流经不同空间点时速度的变化率。

3、研究对象：——流场

4、特点：

——欧拉法是以流场而非单个的质点做研究对象，故相对于拉格朗日法简便，在工程中具有实用意义，故一般可采用欧拉法研究流体的运动规律。

§3—2　描述流体运动的基本概念（欧拉法）

一、迹线、流线

——描述流体的运动，除可用数学表达式表述外，还可用更直观的图形来描述。

1、迹线

——表示某质点在一段时间内的运动轨迹。迹线可以反映出同一质点在不同时刻的速度方向。

2、流线——

某一瞬时，流场空间中的一条曲线，其上任何一点的速度均与该曲线相切。

流场——是由无数流线构成的，各空间点的流速均与流线相切。

（1）流线的特点：

1> 流线互不相交,且为光滑曲线(因为同一时刻、同一质点只有一个速度 矢量)；但驻点、奇点除外。

2> 流线充满整个流场,每个质点都位于一条流线上;

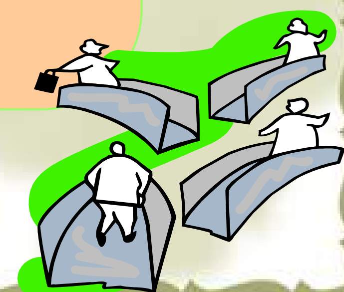
3> 某断面上流线的疏密，可反映该断面流速的大小。

（2）流线微分方程:

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}=\frac{ds}{u}$$

其中 t 是参变量，在积分过程中可作为常量。

将上式积分即可得流线方程。



例：已知流速场为

$$u_x = \frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \quad u_y = \frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \quad u_z = 0$$

其中**q**为常数，求流线方程。

解：流线的微分方程为

$$\frac{dx}{\frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{\frac{q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

或 $\ln x = \ln y + C'$

积分得 $y = Cx$

可见，流线是**oxy**平面上过原点的一族直线（这种流动称为平面流动）

二、流管、流束、过流断面、元流、总流（p55 第四节内容）

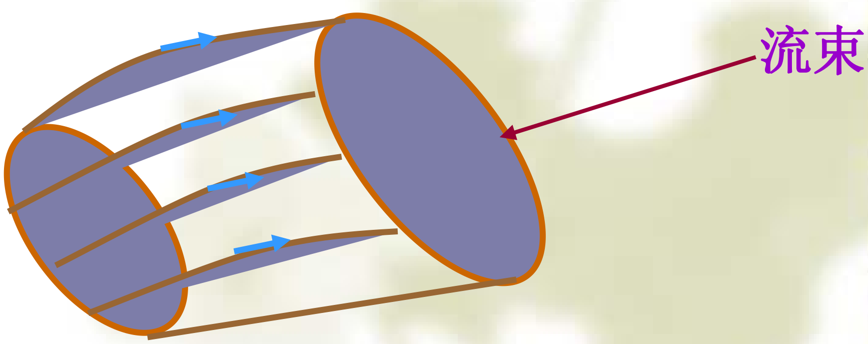
1、流管 ——在流场中作一非流线且不相交的封闭曲线，然后由曲线上的各点作流线，所构成的管状面。

特点：流体的质点不能穿越流管；

若流动为恒定流，则流管的形状、位置不变。

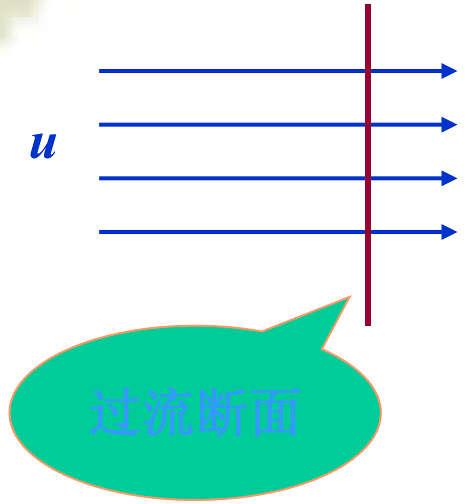
2、流束

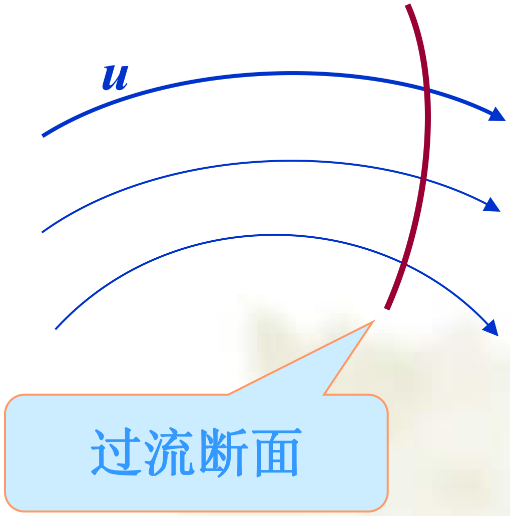
——流管内所包容的流体。



3、过流断面——横断流束并和其中所有流线都正交的横断面。

特点： 过流断面可以是曲面，也可以是平面。





4、元流—— 过流断面面积无限小的流束。

特点：

（1）若流动为恒定流，则元流的形状、位置不变；

（2）同一过流断面上，各点的运动要素可认为相等。

5、总流 —— 过流断面面积为有限大的流束。

总流可看成无数多元流之和，其过流断面面积等于各元流过流断面积的积分。

用简图解释

三、流量、断面平均流速（p56）

1、流量 Q ——单位时间内通过过流断面的流体的量。

（1）表示方法：

体积流量 m^3/s l/s

重量流量 kN/s N/s

质量流量 kg/s

一般用于不可压缩流体。

可用于可压缩流体

（2）计算式：

$$Q=\int_A dQ=\int_A u\,dA$$

2、断面平均流速 *v*

——假想的均匀分布在过流断面上的流速，以它通过的流量与以实际流速分布通过的流量相等。

即过流断面上各点流速的加权平均值。

以符号 *v* 表示，

单位为 *m/s* 。

计算式：

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{\int_A u dA}{A}$$

§3—3　流体运动的分类

一、恒定流与非恒定流

——按流体各点的运动要素是否随时间改变而划分

（参见53页)

1、恒定流 ——流体各点的运动要素均不随时间改变的流动。

（1）函数关系：

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ p = p(x, y, z) \end{cases}$$

运动要素仅是坐标的函数，与时间无关。

其当地加速度为零：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0}$$

（2）特点：

1> 当地加速度为零； 2> 流线、迹线重合；

3> 流管的位置、形状不随时间改变。

2、非恒定流

—流体空间各点有一个运动要素随时间改变即为非恒定流。

（1）函数关系：

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ p = p(x, y, z, t) \end{cases}$$

（2）特点：与恒定流相反。

3、恒定流与非恒定流的判别标准

可据当地加速度是否为零加以判断

恒定流与非恒定流相比，在欧拉变量中少了一个变量 t，从而使 问题变得相对简单，故在工程中通常可将非恒定流问题简化为恒定流 来处理（运动要素随时间变化不太大，不影响计算精度）。在实 际 工程中， 绝对的恒定流几乎不存在。

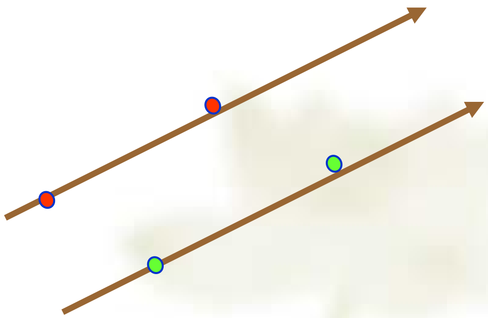
二、均匀流与非均匀流

——按运动要素是否随流程改变来划分。

1、均匀流

（参见62-63页）

——某时刻，流体各相应点（位于同一流线上的点）的流速都不随流程改变的流动。



特点:

1> 流体的迁移加速度为零；

2> 流线是平行的直线；

3> 各过流断面上流速分布沿程不变。

2、非均匀流

——某一时刻，流体相应点的流速因位置的不同而不同的流动。

特点：　与上反。

可据迁移加速度是否为零来判断

3、均匀流与非均匀流的判别标准

4、注意：

（1）恒定流与均匀流的概念区别；

（2）据以上对流体流动的两种分类方法，可将流动分为四种形式。

即：
- 恒定均匀流，　　非恒定均匀流，
- 恒定非均匀流，非恒定非均匀流。

三、渐变流与急变流

—按流线是否接近平行直线来划分。(参见61页)

1、渐变流 —流线之间夹角很小，各流线为近似的平行直线。

特点：

（1）过流断面近似平面；

（2）同一过流断面上，流体各点的动压强分布符合静压强分布。

（3）均匀流是渐变流的特例，同时具有以上两点。

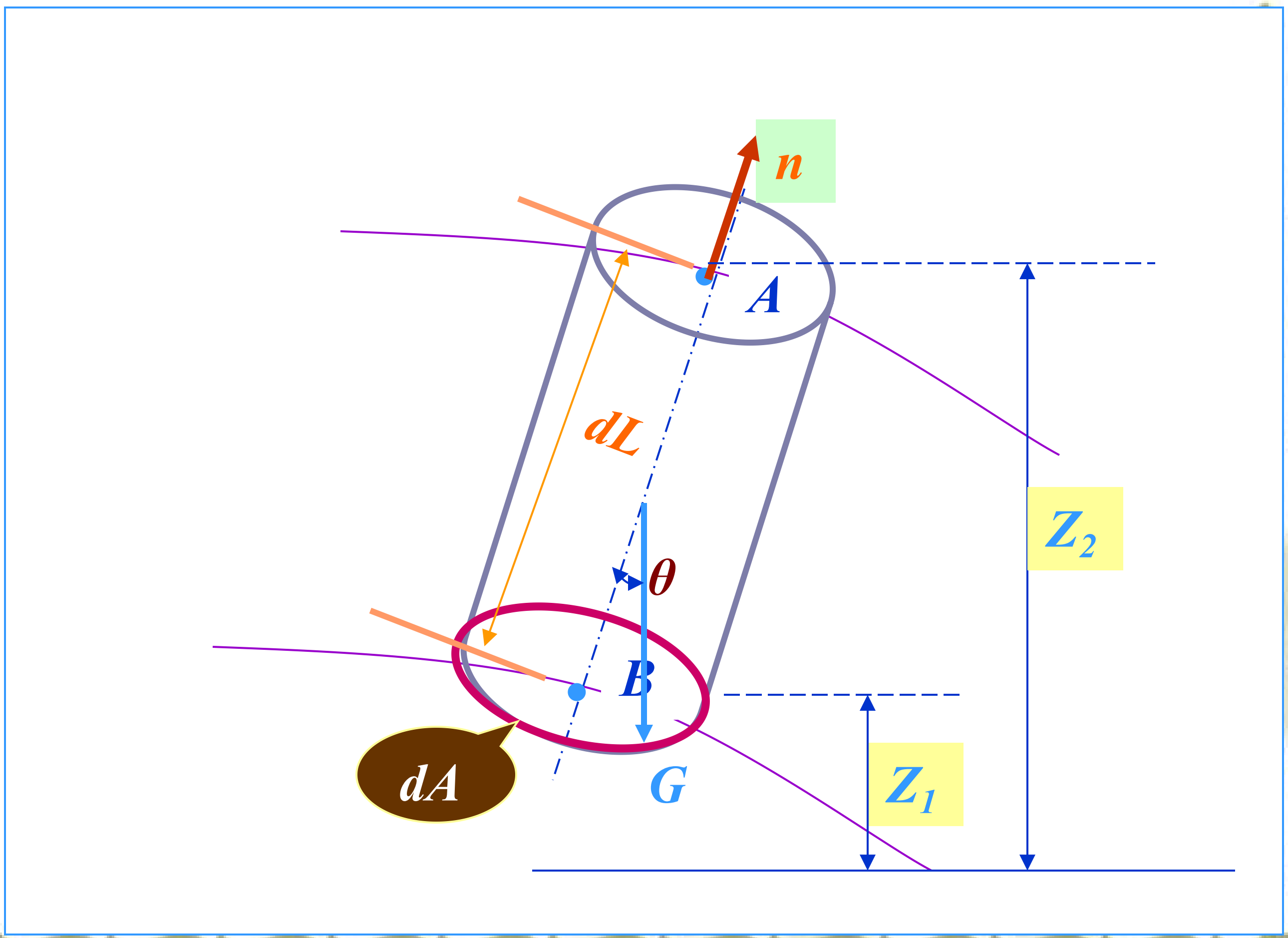
简单分析：

在均匀流过流断面上任作一微小柱体，长为 dL，截面积为 dA。然后， 分析该微元体的受力情况。由于流体在 n 方向（轴向）上没有流速，故 n 方向上的合力应平衡。

假设:

A点： 压强为 p_A， 面积为 dA;

B点： 压强为 p_B， 面积为 dA； 微元体的密度为ρ



平衡方程： $-p_A\, dA + p_B\, dA - \rho g\; dA\, dl\; \cos\theta = 0$

其中： $\cos\theta = \dfrac{Z_2 - Z_1}{dl}$

代入上式即可得证：

$$Z + \frac{p}{\rho g} = C$$

说明：

1> 对不同的过水断面，常数 *C* 是不同的。

2> 过水断面两侧液体互相作用的动水压力可按静水压力公式计算。

2、急变流

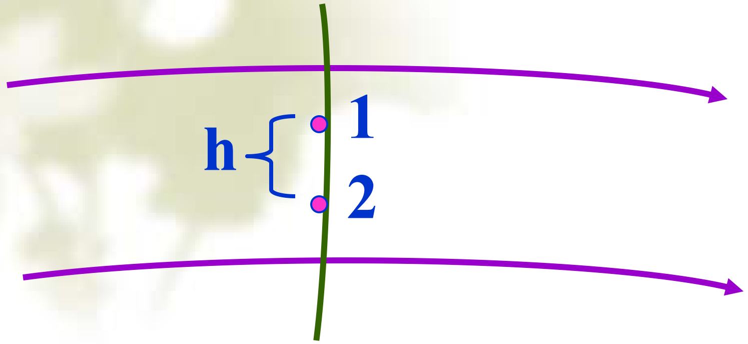
——流线间的夹角较大，流线的曲率半径较大的流动。　　如突扩、水跌等。

3、注：

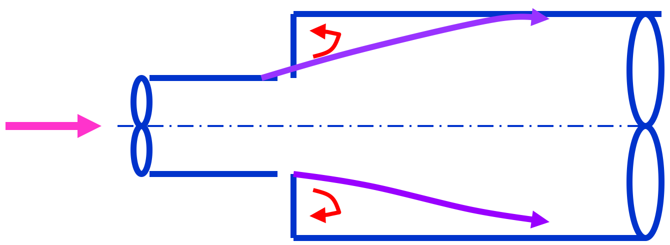
渐变流、急变流是相对而言的，两者的区分要视工程精度而言。渐变流简单、易计算。

无渐变流的特点

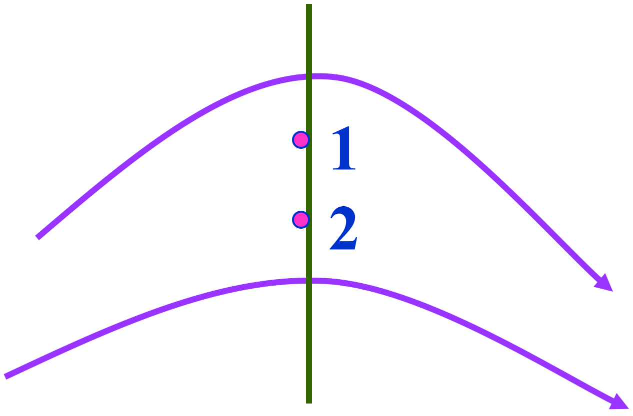
渐变流过流断面

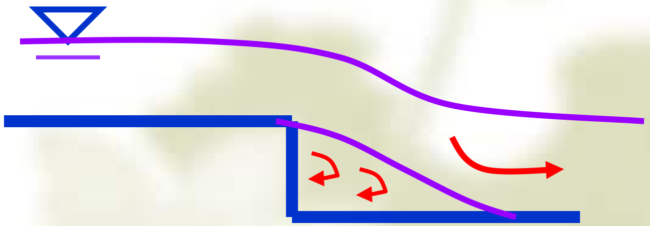


$$P_2 = p_1 + \gamma h$$



急变流过流断面





四、有压流、无压流、射流

按总流边界的限制情况划分

1、有压流 ——流体的流动边界全部是固体的流动。

如给水管路

2、无压流 ——具有自由表面的液体流动。

如明渠、无压涵管等

3、射流 ——流体经孔口或管嘴喷射到空间的流动

五、一元、二元、三元流

← 按空间位置坐标变量的个数划分

1、一元流 —运动要素是一个空间坐标及时间的函数。

若引用断面平均流速概念，可将某些流动视为一元流动，即：$v = v(s, t)$，这是对实际流动的很大简化。

2、二元流 —运动要素是两个空间坐标及时间的函数。

即：　$u = u(x, y, t)$

3、三元流 —运动要素是三个空间坐标及时间的函数。

为简化问题，只需突出主要流动方向，沿该方向选取坐标 s（一般是曲线坐标）流速 u 可表示为： $u = u(s, t)$

§3—4　连续性方程

一、控制体的概念

控制体——流场中一固定不变的空间体积。
控制面——控制体的边界面，是一封闭的表面。

（1）控制面的特点：

1> 控制面相对于坐标系固定不变；
2> 控制面上可以有质量交换；
3> 控制面上受到外力作用；
4> 控制面上可以有能量交换；

（2）控制体的概念对应的是欧拉法，即以固定的空间点为研究对象。

二、连续性方程（恒定、均匀、不可压缩流体）

推导依据是： 质量守恒及恒定流的特性。

1、方程：

（1） 元流的连续性方程： $u_1 dA1 = u_2 dA2 = dQ$

（2） 总流的连续性方程：$\begin{cases} v_1 A1 = v_2 A2 = Q & (\rho = c) \\ \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \end{cases}$

2、适用范围：

1> 汇流、分流；

2> 理想、非理想流体；

3> 不涉及任何作用力。

3、分析：

条件：恒定流，无 $\pm Q$

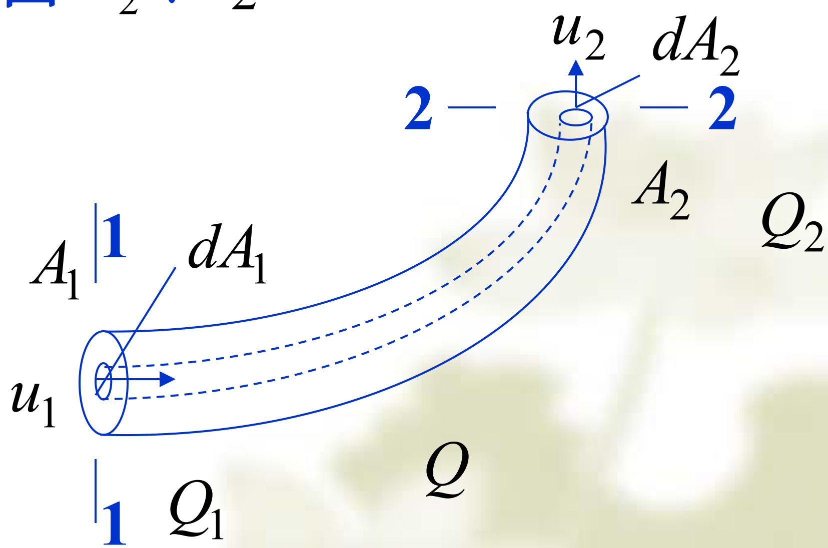
依据:质量守恒定律

设1-1断面 A_1、v_1 ，2-2断面 A_2、v_2

dt

流入 $m_1 = \rho_1 A_1 v_1 dt = \rho_1 Q_1 dt$

流出 $m_2 = \rho_2 A_2 v_2 dt = \rho_2 Q_2 dt$



质量守恒：

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$$

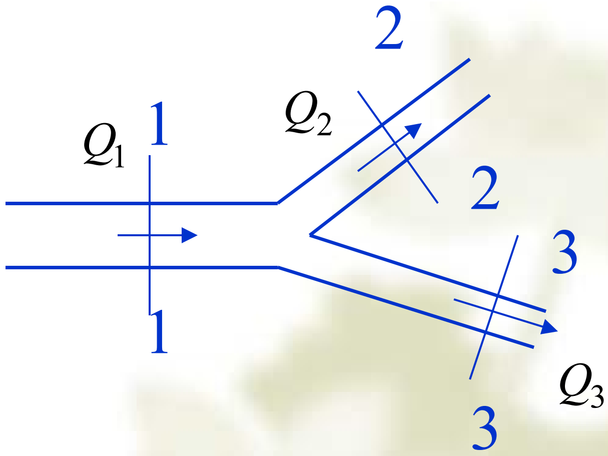
$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

若 $\rho_1 = \rho_2$ 则： $v_1 A_1 = v_2 A_2$

元流： $\begin{cases} \rho_1 dQ_1 = \rho_2 dQ_2 \\ \rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2 \end{cases}$

$\rho = c$ $\begin{cases} dQ_1 = dQ_2 \\ u_1 dA_1 = u_2 dA_2 \end{cases}$

3、当有 $\pm Q$ 时，（根据质量守恒定理）



分流：$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 + \rho_3 Q_3$

常 ρ $Q_1 = Q_2 + Q_3$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 + v_3 A_3$$

举例：P58 例3-2 例3-3 P57 例3-1

§3-4 恒定元流能量方程

一、元流能量方程

1、方程

（1）条件：理想不可压缩流体恒定元流

（2）方程：

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}$$

或

$$\frac{p}{\gamma}+z+\frac{u^2}{2g}=c$$

（3）各项值都是断面值。物理意义为

z ：位置水头 单位位能

$\frac{p}{\gamma}$ ：压强水头 单位压能

$\frac{u^2}{2g}$ ：流速水头 单位动能

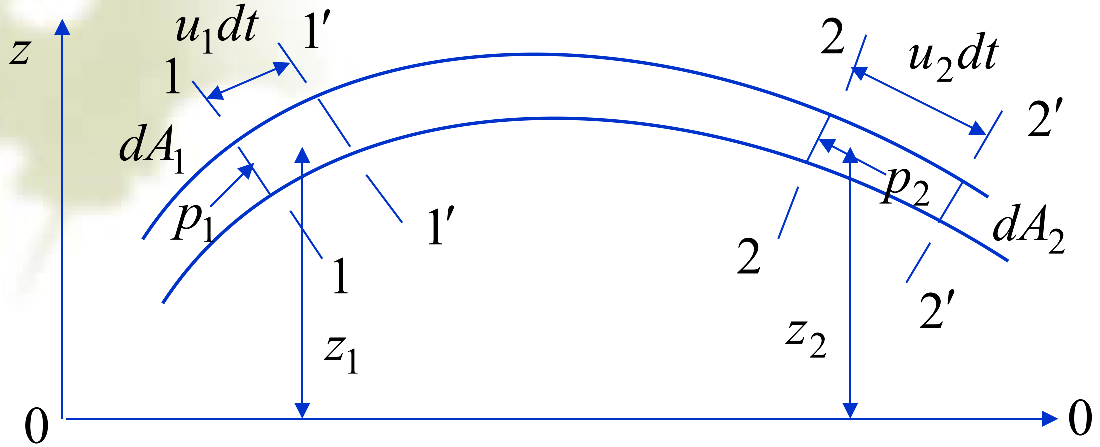
$$H_p=z+\frac{p}{\gamma}$$ 测压管水头，单位势能

$$H=\frac{p}{\gamma}+z+\frac{u^2}{2g}$$ 总水头，单位总能量

2、分析　推导

（1）依据：功能原理　外力做功=机械能量的增加

（2）分析



外力做功： $p_1 dA_1 u_1 dt - p_2 dA_2 u_2 dt = (p_1 - p_2) dQdt$ （1）

机械能增加：

a)动能 $$\frac{\gamma dQdt}{g}\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right) = \gamma dQdt\left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g}\right)$$ （2）

b)位能 $$\gamma dQdt\,(z_2 - z_1)$$ （3）

根据功能原理　（1）=（2）+（3）

整理得：$(p_1+\gamma z_1+\gamma\frac{u_1^2}{2g})dQ=(p_2+\gamma z_2+\gamma\frac{u_2^2}{2g})dQ$

除以 γdQ 得单位能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}$$ ——→ 元流的总能量方程

1、2两断面的选取是任意的

推广：$$\frac{p}{\gamma}+z+\frac{u^2}{2g}=c$$

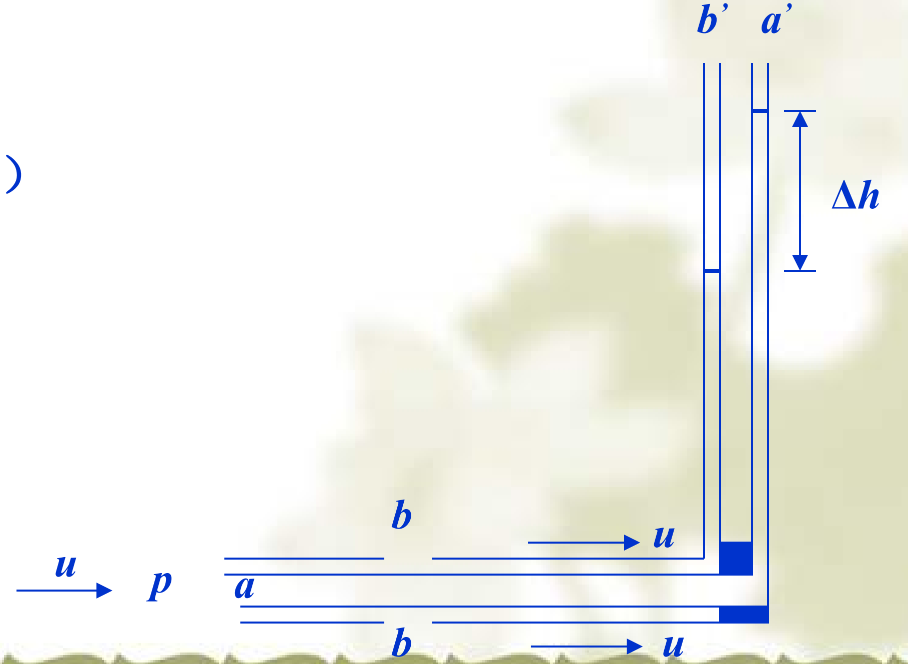
二、毕托管（元流能量方程的应用）

1、原理

应用元流伯努利方程，

通过测量点压强的方法

间接地测出点速度的大小。



列a、b 流线元流能量方程

$$\frac{p_a}{\gamma}+0+0=\frac{p_b}{\gamma}+0+\frac{u^2}{2g}$$

$$u=\sqrt{2g\frac{p_a-p_b}{\gamma}}$$

$$p_a-p_b=\gamma\Delta h$$

$$u=\sqrt{2g\Delta h}$$

修正：

$$u=\varphi\sqrt{2g\Delta h}$$

气流：

$$p_a-p_b=\gamma'\Delta h$$

$$u=\varphi\sqrt{2g\frac{\gamma'}{\gamma}\Delta h}$$

举例：P61[例3-4]　毕托管测流速　已知水柱h_v=3cm，空气容重 $\gamma' = 11.8 \, \mathrm{N/m^3}$

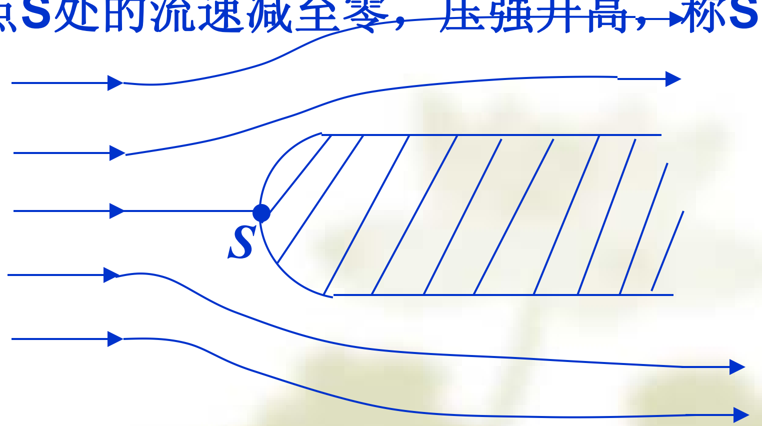
φ取1。求：

（1）风道中的空气流速（ $22.1\mathrm{m/s}$ ）；

（2）管道中的水流速度（$0.766\mathrm{m/s}$ ）。

例2　物体绕流如图，上游无穷远处流速 $u_\infty = 1.2 \, \mathrm{m/s}$ ，压强 $p_\infty = 0$ 的水流

受到迎面物体的障碍后，在物体表面上的顶冲点S处的流速减至零，压强升高，称S点为停滞点或驻点。求滞留点S处的压强。



解：设滞留点S处的压强为p_S，

粘性作用可以忽略。根据

通过S点的流线上伯努利方程有

$$\frac{u_\infty^2}{2g} + \frac{p_\infty}{\gamma} + z_\infty = \frac{u_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + z_s$$

将数据代入并整理得

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{u_\infty^2}{2g} + \frac{p_\infty}{\gamma} - \frac{u_s^2}{2g} = \frac{1.2^2}{2 \times 9.8} + 0 - 0 = 0.073\mathrm{m}$$

§3-5 恒定总流能量方程

一、过流断面的压强分布 p62

1、均匀流过流断面

2、渐变流

流速沿流向变化所形成的惯性小，可忽略不计，流线接近平面。过流断面可以是平面。压强分布也服从流体静力学规律。（静力学压强分布规律）

3、急变流 （了解）

几种情况:

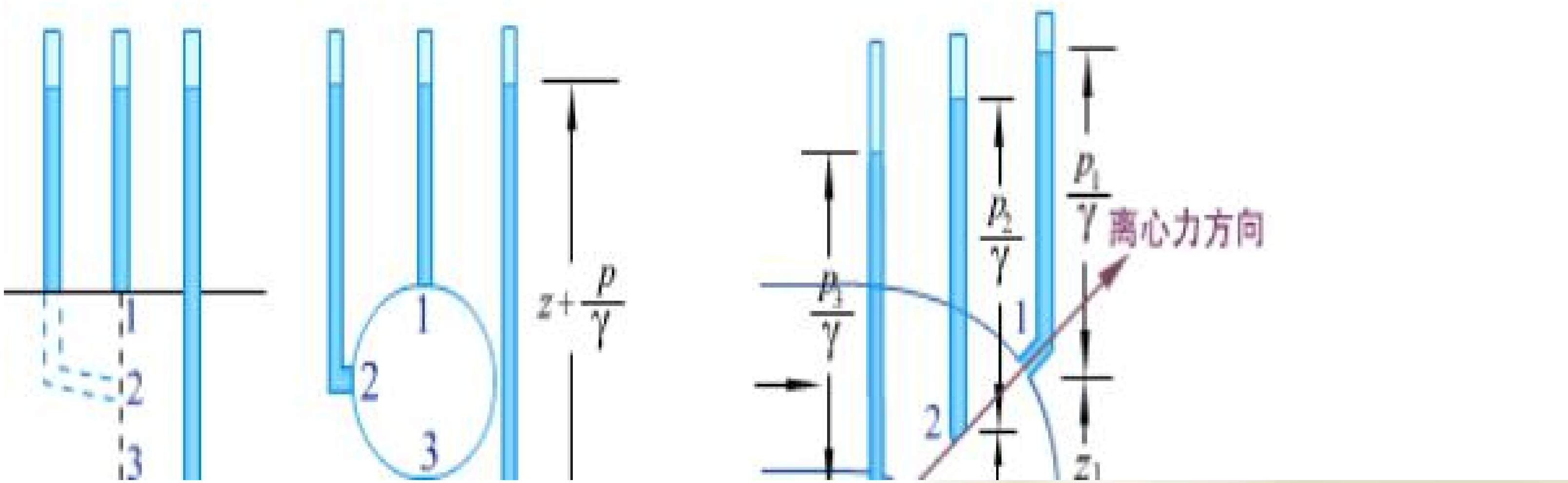
（1）流体在弯管中的流动

（2）流体通过水箱上的孔口流动

（3）明渠中，水流绕曲面流动。

（4）弯管流量计

…::: 渐变流与急变流断面压强分布 :::…



二、恒定总流能量方程式

1、推导依据：（1）元流的能量方程；

（2）连续性方程　$dQ=u_1dA_1= u_2dA_2$　。

2、方程

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

3、分析

对元流能量方程进行积分

（1）实际元流能量方程

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{u_2^2}{2g}+h_w'$$

（2）积分

$$\int_{A_1}(p_1+\gamma z_1+\gamma\frac{u_1^2}{2g})dQ=\int_{A_2}(p_2+\gamma z_2+\gamma\frac{u_2^2}{2g})dQ+\int_Q \gamma h_w' dQ$$

I）势能积分

$$\int(p+\gamma z)dQ=\int(\frac{p}{\gamma}+z)\gamma dQ=(\frac{p}{\gamma}+z)\gamma Q$$

II）动能各积分

$$\int_Q \gamma\frac{u^2}{2g}dQ=\int_A \gamma\frac{u^3}{2g}dA=\frac{\gamma}{2g}\int_A u^3 dA$$

以 $\frac{\gamma}{2g}\int_A v^3 dA$ 代替，引入修正系数α

$$\alpha=\frac{\int u^3 dA}{\int v^3 dA}=\frac{\int u^3 dA}{v^3 A}$$

则

$$\int_Q \gamma\frac{u^2}{2g}dQ=\frac{\alpha v^2}{2g}\gamma Q$$

iii)损失积分

$$\int_Q \gamma h'_w dQ = \gamma h_w Q$$

h_w为平均单位能量损失。

（3）各符号意义：　参考元流。

三、方程的应用条件及使用方法

1、应用条件： （1）流体的流动为恒定流； （2）流体不可压缩；

（3）流体所受质量力只有重力； （4）流体运动是连续的。

2、使用方法： 简言之，分析流动，划分断面，选择基准面，写出方程。

（1）选择基准面： 原则上可任选，一般可尽量使一位置水头为零（即：Z=0）。

（2）选择计算断面： 1> 渐变流过流断面； 2> 已知数较多的断面；

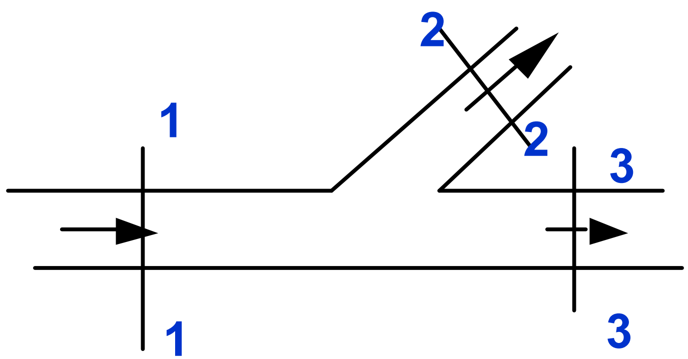
3> 包含未知数的断面。

（3）选择计算点： 1> 对圆形管路，可选择在轴心处； 2> 对明渠，可选择在液面上。

（4）公式中的压强p：可以是绝对压强，也可以是相对压强，只要方程前后统一即可（对气体必须是绝对压强）。

3、公式中的 $\gamma = \rho g$是指计算流体的重度，各项单位要统一。

四、方程的延伸应用



1、有汇流或分流时：

可分别列方程，如：

1—1与2—2 断面

1—1与3—3 断面

2、有能量输入或输出时,可列方程：

***H*m——输入或输出能量**

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \pm H_m = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

五、方程应用举例

1、 **[例3-7]、[例3-8]、[例3-9] P68-71**

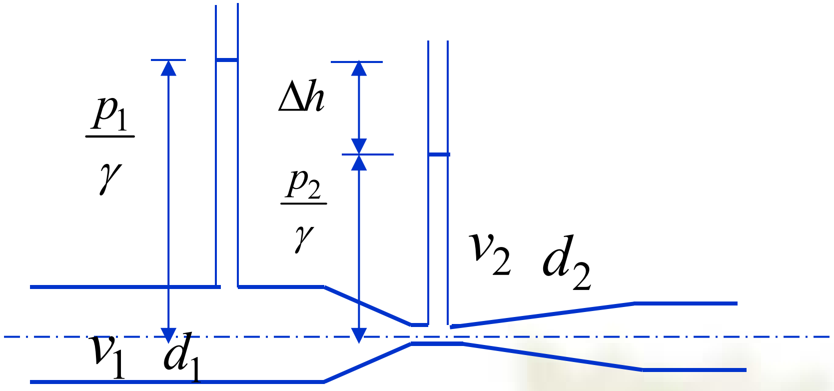
自学

2、文丘里流量计

原理：根据能量方程、连续性方程。由压差的的量测求出流速和流量。

写1、2断面的能量方程式：

$$0+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^{\ 2}}{2g}=0+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^{\ 2}}{2g}$$



移项 $$\frac{p_1}{\gamma}-\frac{p_2}{\gamma}=\frac{v_2^{\ 2}}{2g}-\frac{v_1^{\ 2}}{2g}=\Delta h$$

连续性方程：

$$v_1\times\frac{\pi}{4}d_1^2=v_2\times\frac{\pi}{4}d_2^2$$

整理得：

$$Q=\frac{\pi}{4}d_1^2\sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}=K\sqrt{\Delta h}$$

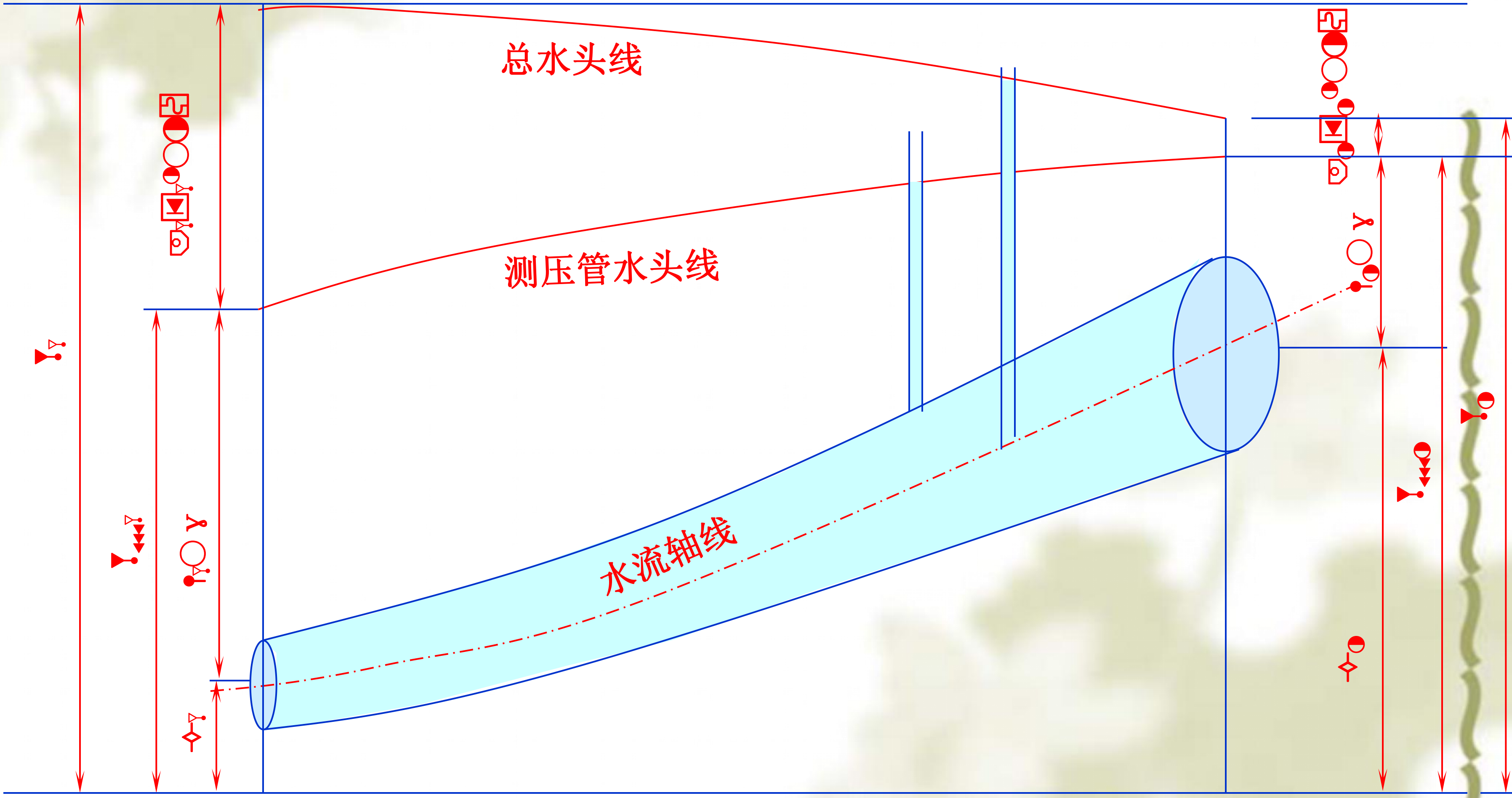
修正：

$$Q=\mu K\sqrt{\Delta h}$$

其中***K***、μ 分别表示仪器常数和文丘里流量计系数。

六、 水头线及其绘制

1、水头线: 表示总流沿程能量变化的几何图示。



2、水头线的绘制

步骤：1〉先定基准线和总流的中心线（管轴线）；

2〉绘总水头线，为此先求出起始断面的总水头值，以确定总水头线的起点；

3〉计算各项局部水头损失和各段的沿程水头损失；*详见第四章*

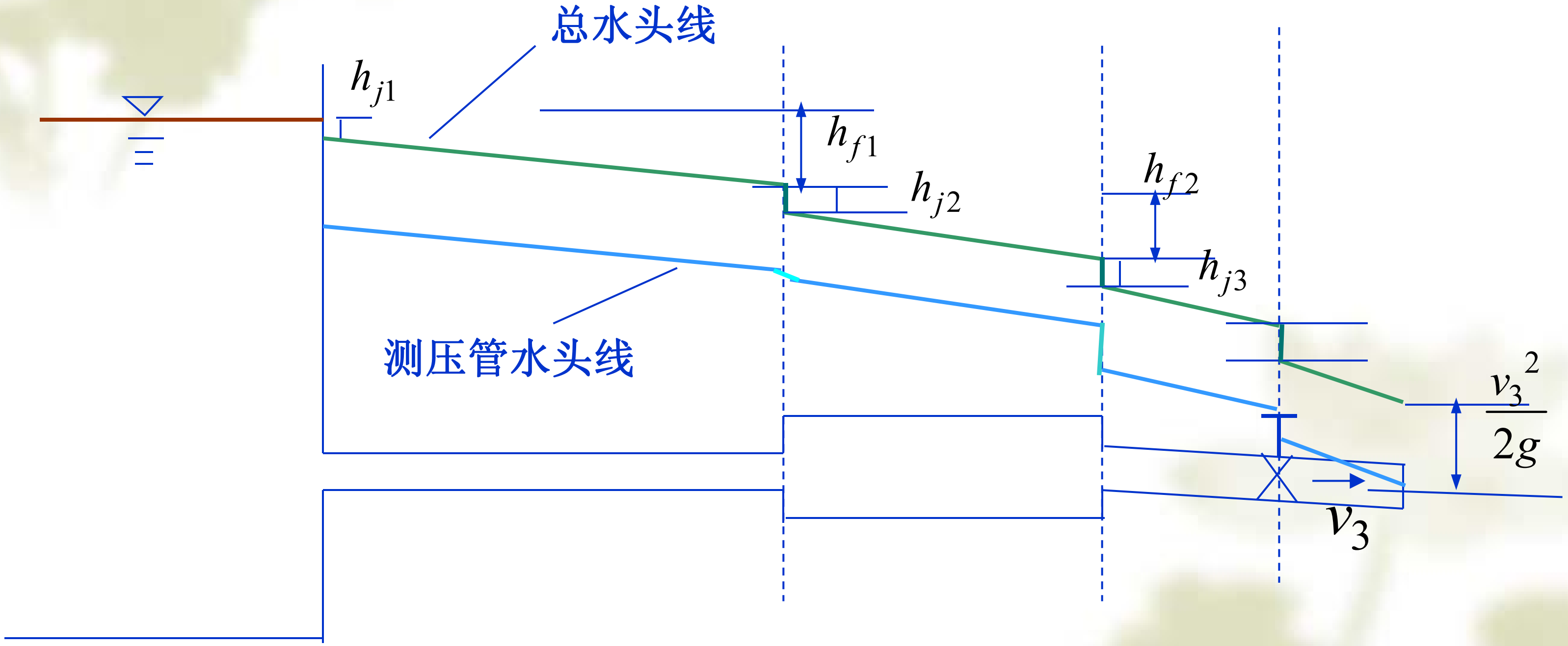
4〉从起始断面的总水头依次减去各项损失，得各断面的总水头，并连成总水头线。

沿程损失假设沿管线均匀发生，表现为沿管长倾斜下降的直线。

局部损失假设在局部障碍处集中作用，表现为铅直下降的直线。

5〉由总水头线向下减去各管段的流速水头，即得测压管水头线。

等直径管段中，测压管水头线应与总水头线平行。



总水头线
h_{j1}
h_{f1}
h_{j2}
h_{f2}
h_{j3}
测压管水头线
$\frac{v_3^2}{2g}$
v_3

§3-6 恒定气流能量方程

一、恒定气流能量方程

1、方程

（1）
$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}+(\gamma_a-\gamma)(z_2-z_1)=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_w$$

（2）简化式
$$p_1+\frac{\rho v^2}{2}=p_2+\frac{\rho v^2}{2}+p_w$$

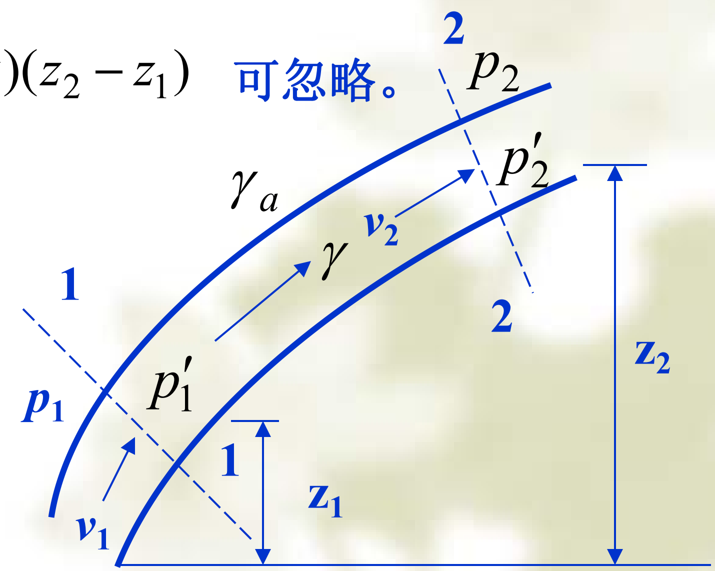
当高差很小或 $\gamma_a-\gamma$ 相差甚小时，$(\gamma_a-\gamma)(z_2-z_1)$ 可忽略。

2、分析

用压强表示的能量方程是

$$\gamma z_1+p_1'+\frac{\rho v_1^2}{2}=\gamma z_2+p_2'+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_w$$

$$p_1=p_1'-p_{a1}\qquad p_2=p_2'-p_{a2}$$



$$p_{a1} = p_{a2} + \gamma_a (z_2 - z_1)$$

$$p_1 - p_2 = (p_1' - p_2') + \gamma_a (z_2 - z_1)$$

代入方程，得

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + (\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1) = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_w$$

3、各项的意义

***P*：** 静压　　$\frac{\rho v^2}{2}$ ：动压　　p_w ：压强损失

$(\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1)$ ：位压，**1断面相对于2断面的位能。**

（1）势压=静压+位压　　$p_s = p + (\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1)$

（2）全压=静压+动压　　$p_q = p + \frac{\rho v^2}{2}$

（3）总压=静压+动压+位压　　$p_z = p + \frac{\rho v^2}{2} + (\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1)$

二、总压线和全压线

反映气流沿程能量变化的图形，压强图、全压线、势压线、位压线等。

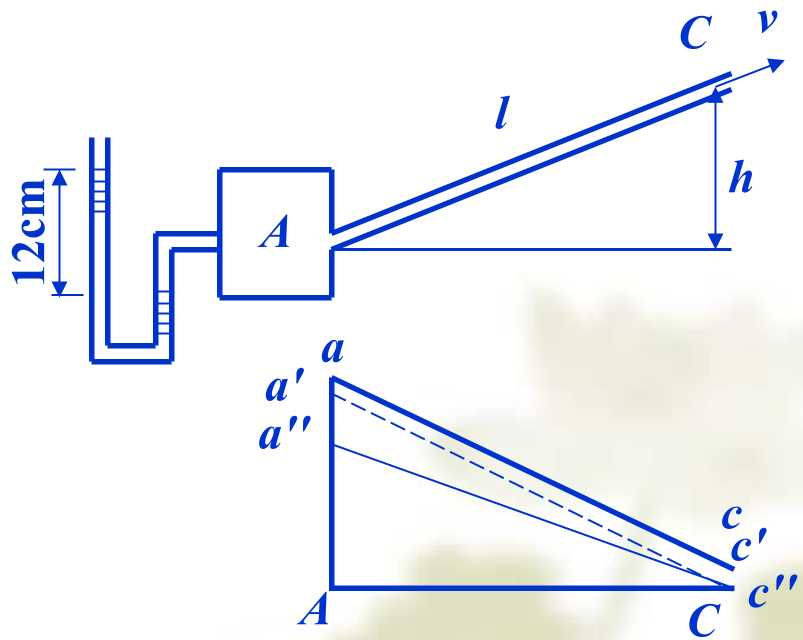
1、压强线的绘制

（1）确定零压线（第二断面压强为零的线）。

（2）绘总压线

$$p_{z1} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + (\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1)$$

$$p_{z2} = p_{z1} - p_w$$



（3）绘势压线

$$p_s = p_z - \frac{\rho v^2}{2}$$

（4）位压线

$$(\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1)$$

四条具有能量意义的线：当**$p>0$**，势压线在位压线上方；当**$p<0$**，势压线在位压线下方。

§3-7 实际流体总流动量方程

一、动量方程

1、总流的动量方程：

$$\sum \vec{F} = \rho Q(\beta_2 \vec{v}_2 - \beta_1 \vec{v}_1)$$

直角坐标分量形式

$$\begin{cases} \rho Q(\beta_2 v_{2x} - \beta_1 v_{1x}) = \sum F_x \\ \rho Q(\beta_2 v_{2y} - \beta_1 v_{1y}) = \sum F_y \\ \rho Q(\beta_2 v_{2z} - \beta_1 v_{1z}) = \sum F_z \end{cases}$$

注意：1>力***F***与流速***v*** 均为矢量。

2>为计算方便，常采用直角坐标分量形式。

2、可解决的问题：急变流中，流体与边界面之间力的作用。

3、分析推导

(1)依据：动量定量

(2)分析

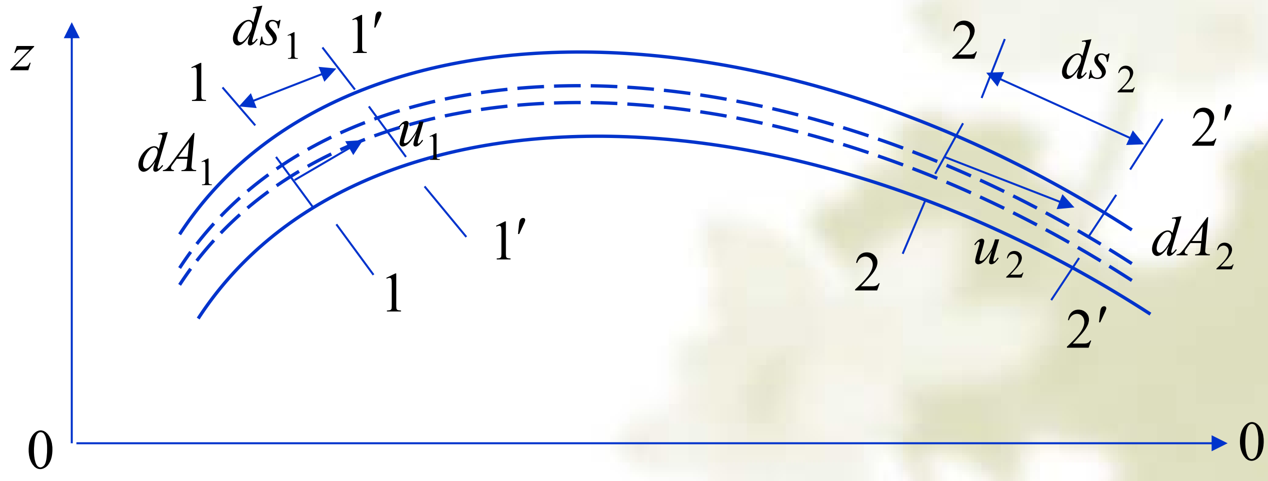
从元流分析开始

动量变化：

$$dk = \rho ds_2 dA_2 \vec{u}_2 - \rho ds_1 dA_1 \vec{u}_1 = \rho dQdt(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

其中： $ds_2 = dtu_2$ $ds_1 = dtu_1$

动量定理： $\frac{dk}{dt} = \sum f$ $\rho dQ(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = \sum f$



积分：

$$\int_{A_2} \rho dQ\vec{u}_2 - \int_{A_1} \rho dQ\vec{u}_1 = \sum F$$

$$dQ = u_2 dA_2 = u_1 dA_1$$

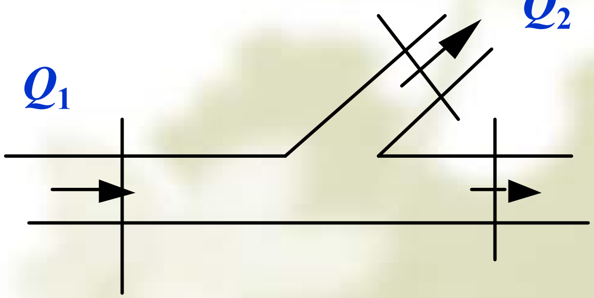
$$\Rightarrow \int_{A_2} \rho\vec{u}_2 u_2 dA_2 - \int_{A_1} \rho\vec{u}_1 u_1 dA_1 = \sum F$$

引入：

$$\beta = \frac{\int_A \rho u^2 dA}{\rho Q v} = \frac{\int_A u^2 dA}{A v^2}$$

$$\Rightarrow \beta_2 \rho Q\vec{v}_2 - \beta_1 \rho Q\vec{v}_1 = \sum F$$

$$\Rightarrow \rho Q(\beta_2\vec{v}_2 - \beta_1\vec{v}_1) = \sum F$$



4、修正：

$$\left(\rho Q_2 v_{2x} + \rho Q_3 v_{3x}\right) - \rho Q_1 v_{1x} = \sum F_x$$

二、方程的应用条件及使用方法

1、应用条件：　可参照能量方程。

2、解题方法：

1〉 选取控制体；

2〉 建立坐标系，分析控制体上的受力（包括表面力和重力）

3〉 列动量方程求解。

说明的几点：

1>方程是矢量式，正确取好外力和速度的正负号。

2> 建立坐标系应尽量使问题简化；

3> 计算断面为渐变流断面（中间可为急变流）；

4〉 动量差 = 流出控制体的动量 — 流入控制体的动量，切不可颠倒；

5> 求压力的压强*p*一律采用相对压强；

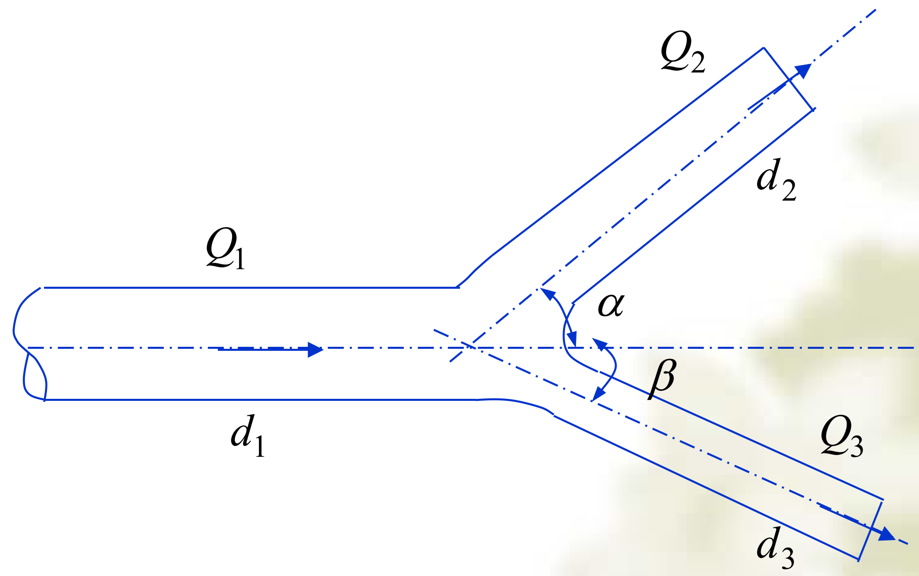
6> 一般要与连续性方程、能量方程联用；

三、应用举例：

例1 P82[例3-16]　　自学

例2如图所示，水平面上的管路在某处分叉，主干管和分叉管的直径、水流量分别为 $d_1 = 500\,\text{mm}$， $d_2 = 400\,\text{mm}$， $d_3 = 300\,\text{mm}$， $Q_1 = 0.35\,\text{m}^3/\text{s}$， $Q_2 = 0.2\,\text{m}^3/\text{s}$，

$Q_3 = 0.15\,\text{m}^3/\text{s}$，夹角 $\alpha=45^\circ$ ， $\beta=30^\circ$ ，主干管在分叉处的表压强为 $8000\,\text{N}/\text{m}^2$ ，试求为固定分叉管路所需的外力。



解：

（1）求**p2**，**p3**

列1-2，1-3 断面能量方程

$$0+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=0+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$0+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=0+\frac{p_3}{\gamma}+\frac{v_3^2}{2g}$$

$$v_1=\frac{Q_1}{A_1}=1.7825\,\mathrm{m/s},$$

$$v_2=\frac{Q_2}{A_2}=1.5915\,\mathrm{m/s},$$

$$v_3=\frac{Q_3}{A_3}=2.1221\,\mathrm{m/s},$$

求得 $p_2=8322\,\mathrm{P_a}$

$$p_3=7337\,\mathrm{P_a}$$

（2）列动量方程

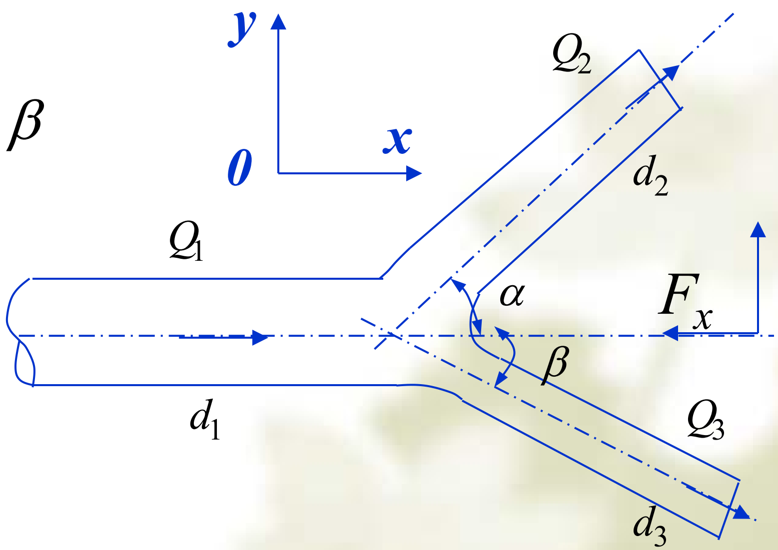
取1-1，2-2，3-3断面间的水体为控制体，建立如图坐标系，分析受力。设管路对水体的力为 F_x ，F_y 。

X方向动量方程：

$$\rho Q_2 v_2 \cos\alpha + \rho Q_3 v_3 \cos\beta - \rho Q_1 v_1$$
$$= -F_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\alpha - p_3 A_3 \cos\beta$$

Y方向动量方程：

$$\rho Q_2 v_2 \sin\alpha - \rho Q_3 v_3 \sin\beta$$
$$= F_y - p_2 A_2 \sin\alpha + p_3 A_3 \sin\beta$$



代入数据，求得

$$F_x = 505\,\mathrm{N}$$
$$F_y = 546\,\mathrm{N}$$
$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 743.7\,\mathrm{N}$$

所以为固定弯管所需外力为743.7N。

第三章 小结

（1）理解描述流体运动的两种方法。（拉氏法和欧拉法）
重点掌握与欧拉法有关的基本概念，如恒定流、非恒定流、均匀流、非均匀流、流线、迹线等。

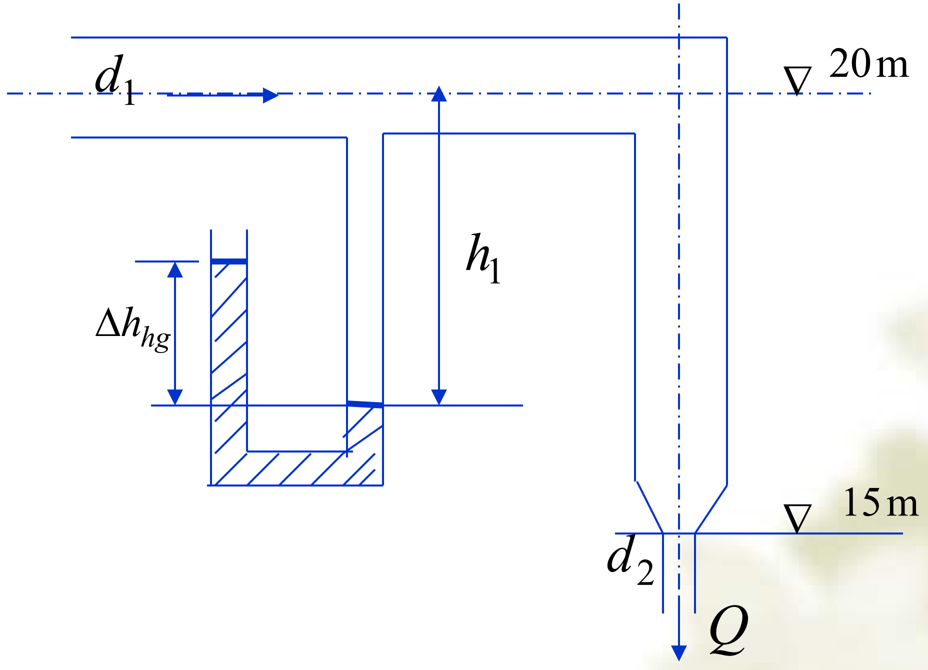
（2）掌握一元流动水头变化的几何表示。

（3）熟练掌握恒定总流的连续性方程、能量方程和动量方程及其综合应用。

习题讲解

1.水流通过如图所示管路流入大气中，已知：U形测压管中水银柱高差

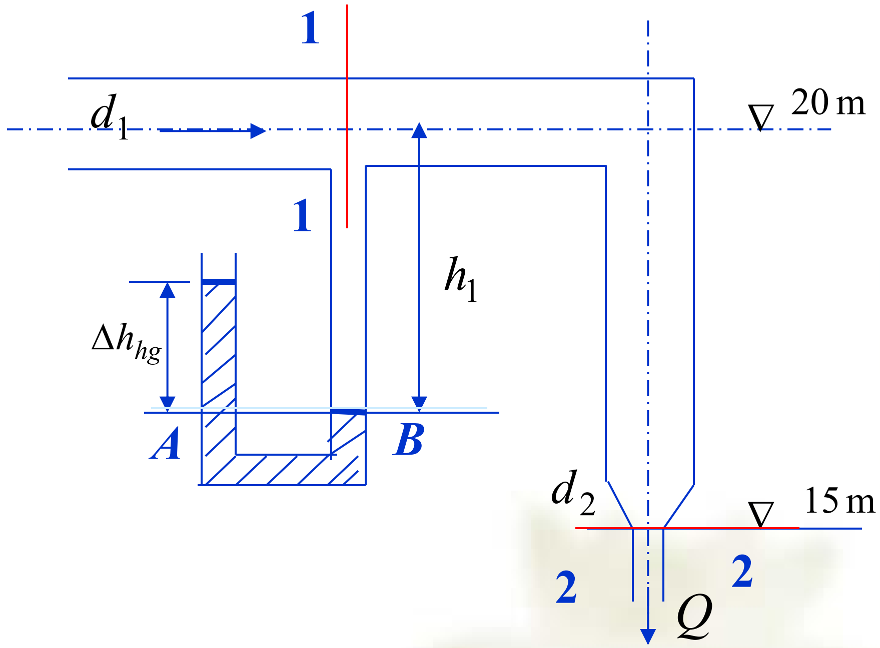
$\Delta h_{hg} = 0.2\,\text{m}$ ， $h_1 = 0.72\,\text{mh}_2\text{o}$ **管径** $d_1 = 0.1\,\text{m}$ **管嘴出口直径** $d_2 = 0.05\,\text{m}$ **，不计管中水头损失，试求：管中流量Q。**



解（1）求1—1断面管路中心的压强

$$\frac{p_A}{\gamma}=\frac{p_B}{\gamma}=13.6\times0.2=2.72\,\text{m}$$

$$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{p_B}{\gamma}-h_1=2.72-0.72=2\,\text{m}$$



（2）以高程0.00处为基准面，

列1-1，2-2断面的能量方程。

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$

连续性方程： $v_1\times\dfrac{\pi d_1^2}{4}=v_2\times\dfrac{\pi d_2^2}{4}$

代入数据，求得 v_2=12.1m/s

所以 $Q=v_2A_2=12.1\times0.785\times0.05^2$

$=0.237\,\text{m}^3/\text{s}$

例2：P88第3-22题

解：列1-2断面能量方程

$$p_1 + 0 + (\gamma_a - \gamma)(z_2 - z_1) = 0 + \frac{\rho v^2}{2} + P_w$$

代

$$-9.8\times 10 + 0 + (1.2 - 0.7)\times 9.8\times H = \frac{0.7v^2}{2} + 0.035\times\frac{H}{d}\times\frac{v^2}{2g}\gamma$$

又

$$\frac{1}{4}\pi d^2 \cdot v\rho g = 176.2\times 10^3 / 3600$$

$$v = 9.09\,\text{m/s}$$

代入能量方程解得：

H=32.64m

同理P_m=-63.5N/m²

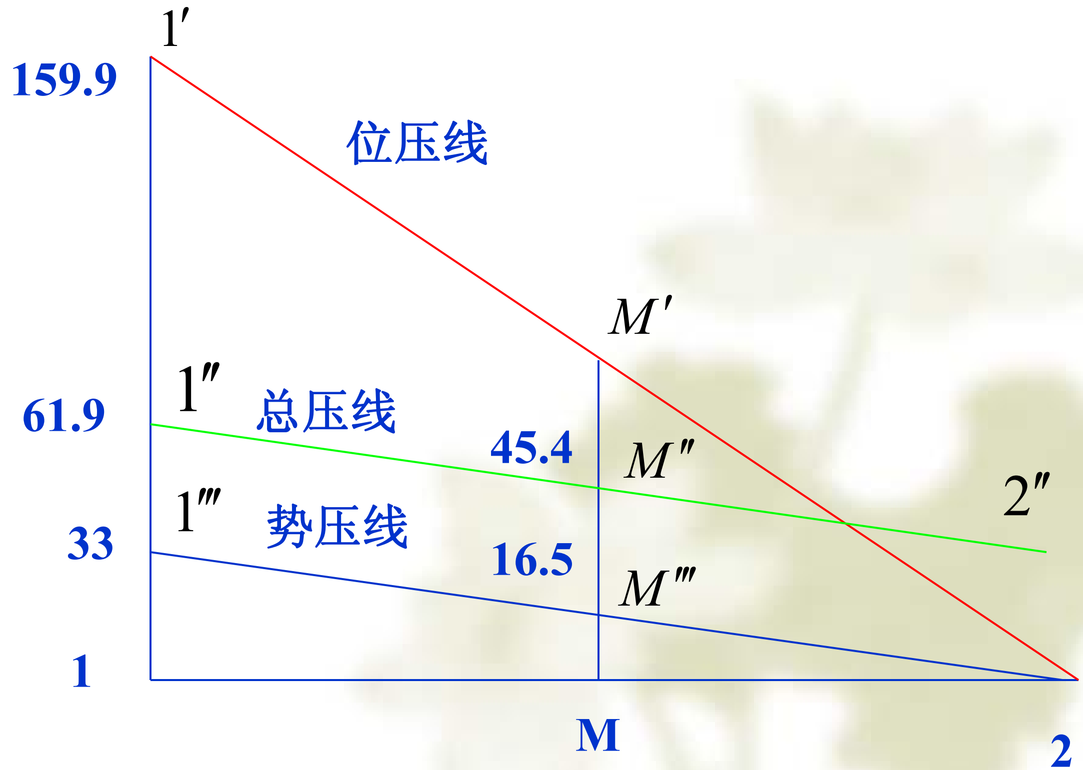
压强线

1断面位压 $159.9\,\mathrm{N/m^2}$

1-2断面 $p_w = 33\,\mathrm{N/m^2}$

动压 $\dfrac{\rho v^2}{2} = 28.9\,\mathrm{N/m^2}$

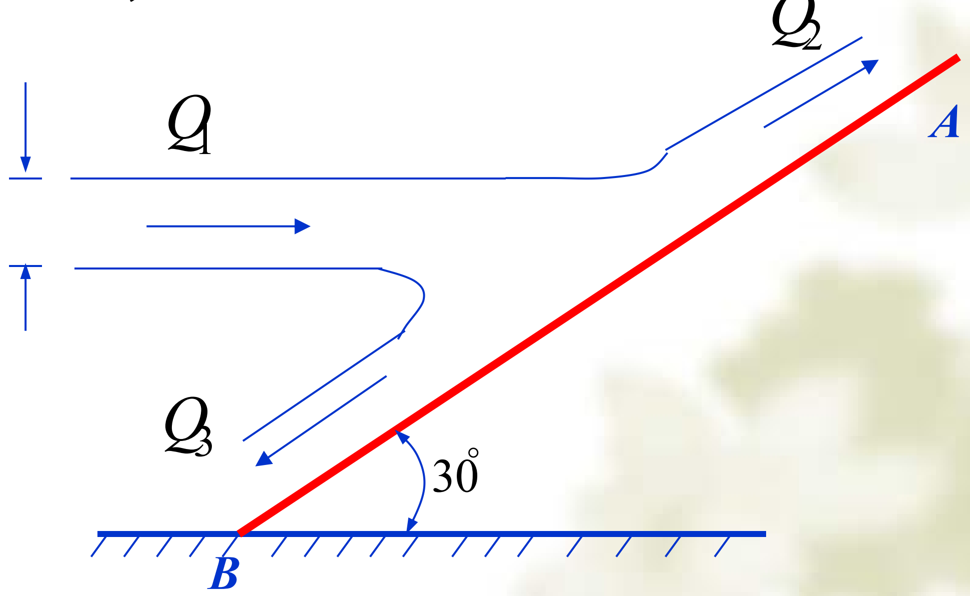
1断面 $p = -98\,\mathrm{N/m^2}$



例3、如图所示，有一高度a为50mm，速度v_1为18m/s的单宽射流水段，冲击在边长为1.2m的光滑平板*AB*上。射流沿平板表面分成两股，已知平板与水流方向的夹角为30^0，平板*B*端为铰点。若忽略水流、空气和平板的摩阻，且流动在同一水平面上，求：

（1）流量分配Q_2和Q_3；

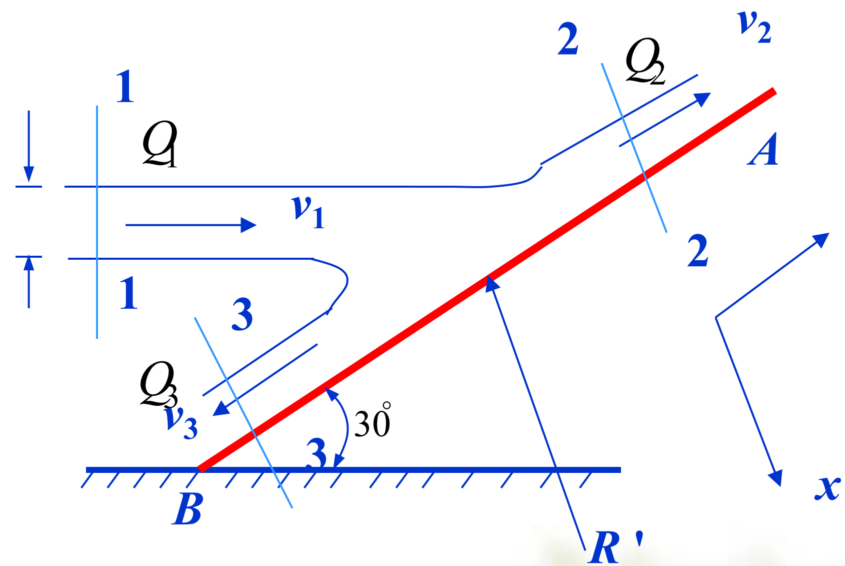
（2）设射流冲击点位于平板形心，若平板自重可忽略，*A*端应施加多大的垂直力*P*,才能保持平板的平衡。



解：

（1）求v_2 ，v_3。

分别列1-2，1-3断面的能量方程，



$$0+0+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+0+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

取

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1.0$$

则 $v_1=v_2=v_3=18\,\mathrm{m/s}$

（2）列动量方程，取1-1，2-2，3-3断面间水体为控制体，建立如图坐标系，分析受力。设作用在水股上的力为 ，R' R'垂直于板AB。

①y轴方向上动量方程

$$\left[\rho Q_2\beta_2 v_2-\rho Q_3\beta_3 v_3\right]-\rho Q_1\beta_1 v_1\cos 30°=0$$

取

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$$

$$\because v_1 = v_2 = v_3$$

代入上式得

$$Q_1 \cos 30° = Q_2 - Q_3$$

$$又 \because Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$得 \begin{cases} Q_2 = 0.933 Q_1 \\ Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0.067 Q_1 \end{cases}$$

②***x*轴方向动量方程**

$$-R' = 0 - \rho Q_1 v_1 \sin 30°$$

$$R' = \rho Q_1 v_1 \sin 30° = 8.1\text{KN}$$

流体对板**AB**的冲击力***R*为8100N**，方向与***R'*** 相反，垂直指向**AB**板面。

（**3**）求***P***

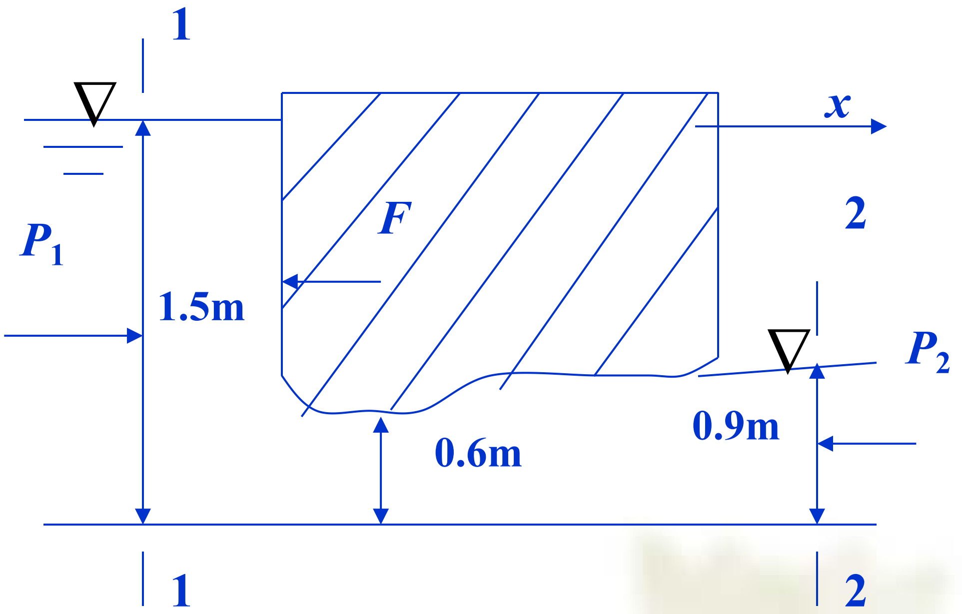
合力矩定理 $\sum M_B = 0 \quad P \times 1.2 = R' \times 0.6 \qquad P = 4050\,\text{N}$

例4：P89习题[3-33]

解：（1）求v_1 、v_2

$$v_1 h_1 B = v_2 h_2 B$$

$$h_1 + 0 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + 0 + \frac{v_2^2}{2g}$$



解得 $v_1 = 2.573\,\mathrm{m/s}$

$v_2 = 4.288\,\mathrm{m/s}$

（2）应用动量方程

$$-F + P_1 - P_2 = \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\gamma h_1^2 \times B = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1.5^2 \times 1.2 = 13.23\,\mathrm{KN}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\gamma h_2^2 \times B = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 0.9^2 \times 1.2 = 4.763\,\mathrm{KN}$$

$$Q = v_1 h_1 B = 2.573 \times 1.5 \times 1.2 = 4.6314\,\mathrm{m^3/s}$$

代入方程，得 $F = P_1 - P_2 - \rho Q(v_2 - v_1) = 0.524\,\mathrm{KN}$