

文章编号: 1000-4750(2017)09-0064-09

一种 NES 与 TMD 的混合控制方案研究

刘良坤¹, 谭平², 闫维明¹, 周福霖^{1,2}

(1. 北京工业大学建筑工程学院, 北京 100124; 2. 广州大学工程抗震研究中心, 广州 510405)

摘要: 提出了一种非线性能量阱(NES)与调谐质量阻尼器(TMD)混合控制结构振动的方案, 结合复变量平均法推得了慢变系统方程, 并利用多尺度分析得到了理论能量预测方程。能量方程表明混合系统中主结构与非线性能量阱的能量呈三次方关系, 而与调谐质量阻尼器的能量为线性关系。数值仿真表明混合系统中非线性能量阱可较快出现靶能量传递现象, 而且整个系统具有较高的耗能效率; 数值计算的能量分布曲线围绕理论能量预测曲线变动, 证实了理论分析的正确性; 混合系统具有良好的鲁棒性, 不仅拓宽了频带, 而且降低了对初始能量的敏感性。

关键词: 混合控制; 慢变系统; 复变量平均法; 靶能量传递; 鲁棒性

中图分类号: TU352 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2016.04.0329

ANALYSIS OF A HYBRID SCHEME COMPRISED OF NONLINEAR ENERGY SINK AND TUNED MASS DAMPER

LIU Liang-kun¹, TAN Ping², YAN Wei-ming¹, ZHOU Fu-lin^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. Earthquake Engineering Research & Test Center, Guangzhou University, Guangzhou 510405, China)

Abstract: An hybrid scheme comprised of Nonlinear Energy Sinks (NES) and Tuned Mass Damper(TMD) is proposed to suppress the vibration of the structure. The equation of slow dynamics system and the analytical energy prediction equation are formulated using the complex-averaging method and the multi-scale method. The derived energy equation shows cubic function relationship in the energy between main structure and NES, and linear relationship between TMD and main structure. The numerical simulation indicates that the phenomenon of targeted energy transfer can be produced quickly in NES of the hybrid system, and high energy consumption rate is achieved in the whole system compared with the pure NES control; It is also demonstrated that theoretical analysis is correct since the curves of numerical calculations vary around the analytical prediction values; Besides, not only wide frequency band but also low sensitivity can be obtained by the hybrid scheme because of its good robustness.

Key words: hybrid control; slow dynamics system; complex-averaging method; targeted energy transfer; robustness

消除结构的有害振动一直以来都是研究的热点。在吸能减振方面, 对调谐质量阻尼器的研究较多, 但它对频率过于敏感而限制了它在许多领域中的应用。不过, 近些年, 非线性能量阱(Nonlinear Energy Sink, NES)因其具有较宽的有效频带逐渐成了新的研究热点。通常, 在一定初始能量下, 1:1

内共振时, NES 有可能出现靶能量(Targeted Energy Transfer, TET)传递现象, 且这种能量传递高效, 这一现象已被证实^[1-4]。

虽然非线性能量阱具有较宽的频带, 但容易受到初始能量的影响, 在不同初始条件下表现出的减振效果却优劣不一, 因此初始能量条件与靶能量的

收稿日期: 2016-04-28; 修改日期: 2016-10-08

基金项目: 教育部创新团队项目(IRT13057); 广东省特支计划项目(2014TX01C141)

通讯作者: 谭平(1973—), 男, 湖南人, 研究员, 博士, 博导, 从事结构振动控制研究(E-mail: ptan@gzhu.edu.cn).

作者简介: 刘良坤(1988—), 男, 江西人, 博士生, 从事结构振动控制研究(E-mail: liuhaikunlzlg@163.com);

闫维明(1960—), 男, 黑龙江人, 教授, 博士, 博导, 从事结构振动控制研究(E-mail: yanwm@bjut.edu.cn);

周福霖(1939—), 男, 广东人, 教授, 硕士, 中国工程院院士, 从事结构减震控制研究(E-mail: zhoul@cae.cn).

传递关系研究就显得非常重要。Sapsis 等^[4]研究了最优靶能量出现的初始条件,并结合非线性模态对其进行了分析。Petit 等^[5]拓宽了此初始条件的能量阈值的概念,使其可用于更一般情况的系统。由于非线性能量阱存在着非线性,为了处理此非线性,需要选择精确的近似处理方法得到合适的立方刚度等参数,其中复变量平均法^[6]较好的处理了这个问题,基于此方法结合多尺度分析,文献[7-9]得到了非线性能量系统的近似慢变系统方程以及吻合良好的能量半解析式,并给出了最优的参数设计。在靶能量的参数设计研究中,Nguyen 等^[10]给出了某一初始能量的靶能量最优刚度设计解析式,并且做了详细的分析论证。另外,文献[11]分析了非线性能量阱对初始能量的鲁棒性。除了理论与数值方面的研究,实验论证也是必要的,Gourc 等^[12]通过理论与实验证实了在周期力作用下的 NES 的减振可能性;Savadkoohi 等^[13-15]在 Nguyen 等^[10]的基础上对并联的 NES 多自由系统做了参数优化分析,并通过实验分析表明,实验数据与理论分析吻合较好。

由于非线性能量阱受初始能量的限制,Nguyen^[10]、Savadkoohi^[15]、Gendelman^[16]、张也弛^[17]等分别提出了多 NES,并列 NES 系统以及串联 NES 的控制方法,使其对初始能量有了较好的鲁棒性,熊怀等^[18]也研究了组合刚度对主结构振动抑制的效果。本文则综合考虑 TMD 不受初始能量影响的特点及 NES 具有较宽频带的优点,提出将两者并联的方式来提高其耗能效率及对频率与初始能量的鲁棒性。基本过程为首先推导混合系统的运动方程,然后采用复变量平均法与多尺度法进行理论处理,最后利用数值模拟与理论分析作对比论证。

1 混合系统振动微分方程

图 1 为本文提出的非线性能量阱系统混合模型(利用 NES 与 TMD 首个字母简记为 NT)。非线性能量阱存在非线性,难以进行精确分析,可结合复变量平均法^[5]并利用多尺度法进行近似分析,其中复变量平均法可消除系统的快变量而提取出慢变部分,并降低系统的阶次。混合系统模型振动微分方程表示如下:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + c_{n0}(\dot{x}_1 - \dot{x}_n) + k_{n0}(x - x_n)^3 + \\ c_{t0}(\dot{x} - \dot{x}_t) + k_{t0}(x - x_t) = 0 \\ m_n\ddot{x}_n + c_{n0}(\dot{x}_n - \dot{x}) + k_{n0}(x_n - x)^3 = 0 \\ m_t\ddot{x}_t + c_{t0}(\dot{x}_t - \dot{x}) + k_{t0}(x_t - x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

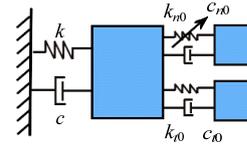


图 1 混合系统(NT)

Fig.1 Hybrid system composed of NES and TMD

其中: m 、 m_n 、 m_t 分别为主系统、NES 以及 TMD 的质量; c 、 c_{n0} 、 c_{t0} 为相应的质量; k 、 k_{n0} 、 k_{t0} 为相应的刚度 x 、 x_n 、 x_t 对应的相对地面或参考系的位移响应。将系统模型简化成如下形式:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon\lambda\dot{x} + \omega_0^2x + \varepsilon_n\lambda_n(\dot{x} - \dot{x}_n) + \varepsilon_nk_n(x - x_n)^3 + \\ \varepsilon_t\lambda_t(\dot{x} - \dot{x}_t) + \varepsilon_tk_t(x - x_t) = 0 \\ \varepsilon_n\ddot{x}_n + \varepsilon_n\lambda_n(\dot{x}_n - \dot{x}) + \varepsilon_nk_n(x_n - x)^3 = 0 \\ \varepsilon_t\ddot{x}_t + \varepsilon_t\lambda_t(\dot{x}_t - \dot{x}) + \varepsilon_tk_t(x_t - x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中参数: $\varepsilon_n = m_n / m$, $\varepsilon_t = m_t / m$, $\varepsilon_n + \varepsilon_t = \varepsilon$, $0 < \varepsilon_n, \varepsilon_t, \varepsilon \ll 1$, $c / m = \varepsilon\lambda$, $c_{n0} / m = \varepsilon_n\lambda_n$, $c_{t0} / m = \varepsilon_t\lambda_t$, $\omega_0^2 = k / m$, $\varepsilon_nk_n = k_{n0} / m$, $\varepsilon_tk_t = k_{t0} / m$, 将式(2)三式相加得:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon\lambda\dot{x} + \omega_0^2x + \varepsilon_n\ddot{x}_n + \varepsilon_t\ddot{x}_t = 0 \\ \varepsilon_n\ddot{x}_n + \varepsilon_n\lambda_n(\dot{x}_n - \dot{x}) + \varepsilon_nk_n(x_n - x)^3 = 0 \\ \varepsilon_t\ddot{x}_t + \varepsilon_t\lambda_t(\dot{x}_t - \dot{x}) + \varepsilon_tk_t(x_t - x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

令 $y_0 = x$, $y_n = x_n - x$, $y_t = x_t - x$, 式(3)变为:

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon_n + \varepsilon_t)\ddot{y}_0 + \varepsilon\lambda\dot{y}_0 + \omega_0^2y_0 + \varepsilon_n\ddot{y}_n + \varepsilon_t\ddot{y}_t = 0 \\ (\ddot{y}_0 + \ddot{y}_n)\varepsilon_n + \varepsilon_n\lambda_n\dot{y}_n + \varepsilon_nk_ny_n^3 = 0 \\ (\ddot{y}_0 + \ddot{y}_t)\varepsilon_t + \varepsilon_t\lambda_t\dot{y}_t + \varepsilon_tk_ty_t = 0 \end{cases} \quad (4)$$

采用复变量平均法^[5]计算时,需引入复变量代换 $\phi_0 e^{i\omega_0 t} = \dot{y}_0 + i\omega_0 y_0$, $\phi_n e^{i\omega_0 t} = \dot{y}_n + i\omega_0 y_n$, $\phi_t e^{i\omega_0 t} = \dot{y}_t + i\omega_0 y_t$ 。系统发生内共振是非线性能量阱靶能量传递的前提,取复变量中的快变频率为结构固有频率,即 1:1 共振,此时也接近 TMD 最耗能有效的共振频率比。式(4)变为:

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon_n + \varepsilon_t)\dot{\phi}_0 + \varepsilon_n\dot{\phi}_n + \varepsilon_t\dot{\phi}_t + \frac{\varepsilon_n i\omega_0}{2} \cdot \\ (\phi_0 - \phi_0^* e^{-2i\omega_0 t} + \phi_n - \phi_n^* e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{\varepsilon_t i\omega_0}{2} (\phi_0 - \\ \phi_0^* e^{-2i\omega_0 t} + \phi_t - \phi_t^* e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{\varepsilon\lambda}{2} (\phi_0 + \phi_0 e^{-2i\omega_0 t}) = 0 \\ \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_n + \frac{i\omega_0}{2} (\phi_0 - \phi_0^* e^{-2i\omega_0 t} + \phi_n - \phi_n^* e^{-2i\omega_0 t}) + \\ \frac{\lambda_n}{2} (\phi_n + \phi_n e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{ik_n}{8\omega_0^3} (\phi_n^3 e^{2i\omega_0 t} - 3\phi_n |\phi_n|^2 + \\ 3\phi_n^* |\phi_n|^2 e^{-2i\omega_0 t} - \phi_n^{*3} e^{-4i\omega_0 t}) = 0 \\ \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_t + \frac{i\omega_0}{2} (\phi_0 - \phi_0^* e^{-2i\omega_0 t} + \phi_t - \phi_t^* e^{-2i\omega_0 t}) + \\ \frac{\lambda_t}{2} (\phi_t + \phi_t e^{-2i\omega_0 t}) - \frac{ik_t}{2\omega_0} (\phi_t - \phi_t^* e^{-2i\omega_0 t}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

消去快变部分和久期项则有:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_n + \frac{i\omega_0}{2}(\phi_0 - \phi_n) + \frac{\lambda_n}{2}(\phi_n) - \frac{3ik_n}{8\omega_0^3}\phi_n|\phi_n|^2 = 0 \\ \dot{\phi}_0 + \dot{\phi}_t + \frac{i\omega_0}{2}(\phi_0 + \phi_t) + \frac{\lambda_t}{2}(\phi_t) - \frac{ik_t}{2\omega_0}\phi_t = 0 \\ (1 + \varepsilon_n + \varepsilon_t)\dot{\phi}_0 + \varepsilon_n\dot{\phi}_n + \varepsilon_t\dot{\phi}_t + \frac{\varepsilon_n i\omega_0}{2}(\phi_0 + \phi_n) + \\ \frac{\varepsilon_t i\omega_0}{2}(\phi_0 + \phi_t) + \frac{\varepsilon\lambda}{2}\phi_0 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式(6)存在非线性项难以求得精确解, 这里用慢变方程近似分析. 引入多尺度变换有:

$$\begin{aligned} \phi_j &= \phi_{j0} + \varepsilon\phi_{j1} + \varepsilon^2\phi_{j2} + \dots \\ \tau_j &= \varepsilon^j\tau \\ \frac{d}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau_2} + \dots \end{aligned}$$

其中 ϕ_j 为对应主系统, NES 以及 TMD 的复变量.

若取前两阶:

$$\begin{aligned} \phi_j &= \phi_{j0} + \varepsilon\phi_{j1}, \\ \tau_0 &= \tau, \tau_1 = \varepsilon\tau, \\ \frac{d}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1}. \end{aligned}$$

多尺度展开后, 对应式(6)的 ε^0 有:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi_{010}}{\partial t_0} = 0 \\ \frac{\partial\phi_{010}}{\partial t_0} + \frac{\partial\phi_{n10}}{\partial t_0} + \frac{i\omega_0}{2}(\phi_{010} + \phi_{n10}) + \\ \frac{\lambda_n}{2}\phi_{n10} - \frac{3ik_n}{8\omega_0^3}\phi_{n10}|\phi_{n10}|^2 = 0 \\ \frac{\partial\phi_{010}}{\partial t_0} + \frac{\partial\phi_{t10}}{\partial t_0} + \frac{i\omega_0}{2}(\phi_{010} + \phi_{t10}) + \\ \frac{\lambda_t}{2}\phi_{t10} - \frac{ik_t}{2\omega_0}(\phi_{t10}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式(7)中 $\frac{\partial^*}{\partial t_0}$ 项在趋于平衡状态 ($t_0 \rightarrow \infty$) 时为

0, 那么式(7)改写如下:

$$\begin{cases} \frac{i\omega_0}{2}(\phi_{010} + \phi_{n10}) + \frac{\lambda_n}{2}\phi_{n10} - \frac{3ik_n}{8\omega_0^3}\phi_{n10}|\phi_{n10}|^2 = 0 \\ \frac{i\omega_0}{2}(\phi_{010} + \phi_{t10}) + \frac{\lambda_t}{2}\phi_{t10} - \frac{ik_t}{2\omega_0}(\phi_{t10}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

对于 ε^1 阶, 同样消去 $\frac{\partial^*}{\partial t_0} = 0$ ($t_0 \rightarrow \infty$) 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_{010}}{\partial t_1} + \frac{\varepsilon_n i\omega_0}{2\varepsilon}(\phi_{010} + \phi_{n10}) + \\ \frac{\varepsilon_t i\omega_0}{2\varepsilon}(\phi_{010} + \phi_{t10}) + \frac{\lambda}{2}\phi_{010} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

采用复变量的极坐标形式:

$$\phi_{010} = R_0 e^{i\theta_0(t_1)}, \quad \phi_{n10} = R_n e^{i\theta_n(t_1)}, \quad \phi_{t10} = R_t e^{i\theta_t(t_1)}$$

那么式(8)两式采用极坐标并令其实部与虚部为 0 有:

$$\begin{cases} R_0 \sin(\theta_0 - \theta_n) = \frac{\lambda_n R_n}{\omega_0} \\ R_0 \cos(\theta_0 - \theta_n) = -R_n \left(1 - \frac{3k_n}{4\omega_0^4} R_n^2 \right) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} R_0 \sin(\theta_0 - \theta_t) = \frac{\lambda_t R_t}{\omega_0} \\ R_0 \cos(\theta_0 - \theta_t) = -R_t \left(1 - \frac{k_t}{\omega_0^2} \right) \end{cases} \quad (11)$$

同样地, 式(9)两式采用极坐标并令其实部与虚部为 0 有:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_0}{\partial t_1} = -\frac{1}{2}\lambda R_0 + \frac{\omega_0 \varepsilon_n}{2\varepsilon} R_n \sin(\theta_n - \theta_0) + \\ \frac{\omega_0 \varepsilon_t}{2\varepsilon} R_t \sin(\theta_t - \theta_0) \\ R_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial t_1} = -\frac{\omega_0 R_0}{2} - \frac{\omega_0 \varepsilon_n}{2\varepsilon} R_n \cos(\theta_n - \theta_0) - \\ \frac{\omega_0 \varepsilon_t}{2\varepsilon} R_t \cos(\theta_t - \theta_0) \end{cases} \quad (12)$$

由式(10)、式(11)、式(12)得:

$$\begin{cases} R_0 \frac{\partial R_0}{\partial t_1} = -\frac{1}{2}\lambda R_0^2 - \frac{\lambda_n \varepsilon_n}{2\varepsilon} R_n^2 - \frac{\lambda_t \varepsilon_t}{2\varepsilon} R_t^2 \\ R_0^2 = R_n^2 \left[\left(\frac{\lambda_n}{\omega_0} \right)^2 + \left[1 - \frac{3k_n}{4\omega_0^4} R_n^2 \right]^2 \right] \\ R_0^2 = R_t^2 \left[\left(\frac{\lambda_t}{\omega_0} \right)^2 + \left[1 - \frac{k_t}{\omega_0^2} \right]^2 \right] \end{cases} \quad (13)$$

引入:

$$\begin{cases} E_0 = R_0^2 = |\phi_{010}|^2 = \dot{y}_0^2 + \omega_0^2 y_0^2 \\ E_n = R_n^2 = |\phi_{n10}|^2 = \dot{y}_n^2 + \omega_n^2 y_n^2 \\ E_t = R_t^2 = |\phi_{t10}|^2 = \dot{y}_t^2 + \omega_t^2 y_t^2 \end{cases}$$

$E_j = R_j^2$ 的形式与保守能量形式相似, 可以认为代表某种能量. 式(13)变为:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_0}{\partial t_1} = -\lambda E_0 - \frac{\lambda_n \varepsilon_n}{\varepsilon} E_n - \frac{\lambda_t \varepsilon_t}{\varepsilon} E_t \\ E_0 = E_n \left[\left(\frac{\lambda_n}{\omega_0} \right)^2 + \left[1 - \frac{3k_n}{4\omega_0^4} E_n \right]^2 \right] \\ E_0 = E_t \left[\left(\frac{\lambda_t}{\omega_0} \right)^2 + \left[1 - \frac{k_t}{\omega_0^2} \right]^2 \right] \end{cases} \quad (14)$$

式(14)第一式表明系统的能量最终由主结构自身阻尼,非线性能量阱阻尼以及 TMD 阻尼来耗散;第二式表明系统主结构能量与 NES 能量成三次多项式关系,这也充分说明了 NES 非线性特征;而第三式则表明主结构能量与 TMD 成线性关系,这也符合实际的情况。将式(14)作如下变换,

$$Z_0 = \frac{E_0 k_n}{\omega_0^4}, \quad Z_n = \frac{k_n}{\omega_0^4} E_n, \quad Z_t = \frac{k_t}{\omega_0^4} E_t, \quad r_0 = \frac{\lambda}{\omega_0},$$

$$r_n = \frac{\lambda_n}{\omega_0}, \quad r_t = \frac{\lambda_t}{\omega_0}, \quad \text{若忽略主结构阻尼影响,则有:}$$

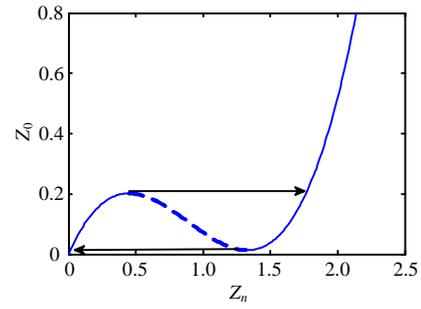
$$\begin{cases} \frac{\partial Z_0}{\partial t_1} = -\frac{\omega_0 r_n \varepsilon_n}{\varepsilon} Z_n - \frac{\omega_0 r_t \varepsilon_t}{\varepsilon} Z_t \\ Z_0 = Z_n \left[r_n^2 + \left[1 - \frac{3}{4} Z_n \right]^2 \right] \\ Z_0 = Z_t \left[r_t^2 + \left[1 - \frac{k_t}{\omega_0^2} \right]^2 \right] \end{cases} \quad (15)$$

2 混合系统参数设计

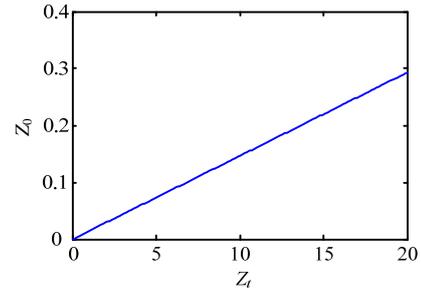
根据式(15)后两式作出其相应的能量分析预测图,如图2所示。其中图2(a)为主结构能量与 NES 能量关系图,虚线表示不稳定段,实线为稳定段。当主结构能量从左端稳定段上升时,达到峰值点后会出现如图箭头所示的跳跃现象;当主结构能量从右端稳定段下降时,达到谷点后也会有跳跃现象,此时的跳跃即是 TET 现象^[10](峰值、谷底的数值与系统参数及设计初始能量有关)。图2(b)为主结构能量与 TMD 能量关系图,显然呈线性关系。

2.1 NES 参数设计

由于 NES 存在非线性,文献[19]的比较法并不适用。但为了实现靶能量传递,Nguyen 等^[10]给出了 NES 最优刚度设计方法,即结构初始能量必须大于峰值点 Z_0^+ 。结合图2,观察式(14)、式(15),发现 NT 中靶能量传递的实现与 NES 本身参数有关,设计时可认为 NES 与 TMD 是相互独立的,那么在



(a) 主结构与 NES 理论预测能量($r_n=0.1$)



(b) 主结构与 TMD 理论预测能量($r_t=0.12$)

图2 能量关系

Fig.2 Energy relationship

NT 中 NES 能够出现 TET 现象需满足:

$$Z_0 > Z_0^+ \quad (16)$$

其中相应的峰值点与谷点参数如图2(a),

峰值点:

$$Z_n^+ = \frac{4}{9}(2-\alpha), \quad Z_0^+ = \frac{8}{81}[4-\alpha^2(3-\alpha)]$$

谷点:

$$Z_n^- = \frac{4}{9}(2+\alpha), \quad Z_0^- = \frac{8}{81}[4-\alpha^2(3+\alpha)]$$

上四式中, $\alpha = \sqrt{1-3r_n^2}$, $r_n \in [0, r_{n\max} = \sqrt{1/3}]$ 。

那么结合式(16)得:

$$Z_0 = \frac{k_n}{\omega_0^4} E_0 > Z_0^+ = \frac{8}{81}[4-\alpha^2(3-\alpha)] \quad (17)$$

代入式(2)相应变量易得:

$$kn_0 = \frac{8m_n \omega_0^4}{81E_{0\text{inti}}} [4 - (1-3r_n^2)(3 - \sqrt{1-3r_n^2})] \quad (18)$$

$E_{0\text{inti}} = R_0^2 = |\phi_{010}|^2 = \dot{y}_0^2 + \omega_0^2 y_0^2$, 表示设计初始能量。

2.2 TMD 参数设计

为了解此混合系统中 TMD 的参数特征,将式(15)第三式作如下变换:

$$\frac{Z_0}{Z_t} = r_t^2 + \left[1 - \frac{k_t}{\omega_0^2} \right]^2 \quad (19)$$

代入 $r_t = \frac{\lambda_t}{\omega_0} = 2\xi_t f$, $\frac{k_t}{\omega_0^2} = \frac{k_{t0}}{\omega_0^2 m_t} = \frac{\omega_t^2}{\omega_0^2} = f^2$, 其中 $f = \frac{\omega_t}{\omega_0}$ 为频率比, ξ_t 为阻尼比, 式(19)变为:

$$Z_0 / Z_t = (2\xi_t f)^2 + (1 - f^2)^2 \quad (20)$$

令 $F = f^2$, 则有:

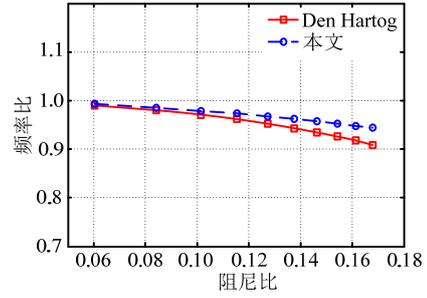
$$Z_0 / Z_t = F^2 + (4\xi_t^2 - 2)F + 1 \quad (21)$$

由二次函数性质, 易得其极值点 $(F, (Z_0 / Z_t)_{\min}) = (1 - 2\xi_t^2, 4\xi_t^2(1 - \xi_t^2))$, 那么式(21)最小值 $(Z_0 / Z_t)_{\min} = 4\xi_t^2(1 - \xi_t^2)$, 此时表明其主结构能量与 TMD 相对能量的斜率最小, 即 TMD 耗能最有效。同样的, 可以将 $(Z_0 / Z_t)_{\min}$ 看成是 ξ_t^2 的二次函数, 容易求得 $0 \leq (Z_0 / Z_t)_{\min} \leq 1$ 。可先分析 ξ_t^2 的边界处的情况: 当 $\xi_t^2 = 0$ 有 $(Z_0 / Z_t)_{\min} = 0$, 频率比参数 $F = f^2 = 1 - 2\xi_t^2 = 1$, 即表明 TMD 与结构具有完全传递能量的能力, 但此时 TMD 无能量耗散, 相当于无减振效果; 当 $\xi_t^2 = 0.5$, 其频率比参数 $F = f^2 = 1 - 2\xi_t^2 = 0$, $(Z_0 / Z_t)_{\min} = 1$, 此时相当于 TMD 与主结构无连接, 实际上不存在。因此需要选择合适的参数, 才能有较多的能量传递至 TMD 同时又能够得以快速耗散。本文打算采用 Den Hartog^[20]最优参数对 NT 中 TMD 进行设计:

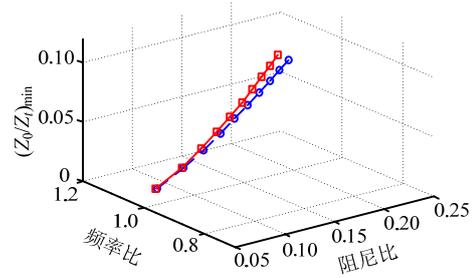
$$f_{\text{opt}} = 1 / (1 + \mu) \quad (22)$$

$$\xi_{\text{opt}} = \sqrt{3\mu / (1 + \mu) / 8} \quad (23)$$

注意式(22)、式(23)中 $\mu = \varepsilon_t$ 。确定质量比后即可得到最优参数, 若利用 Den Hartog 的最优阻尼比, 根据上一段分析所得的极值点处频率比参数 $F = f^2 = 1 - 2\xi_t^2$, 容易得到频率比 f 与相应的 $(Z_0 / Z_t)_{\min} = 4\xi_t^2(1 - \xi_t^2)$ 。图 3 所描述的最优参数为取质量比为 0.01~0.1 时 Den Hartog 最优频率比和阻尼比, 以及利用 Den Hartog 最优阻尼比得到的极值点对应的频率比 f 和 $(Z_0 / Z_t)_{\min}$ 。显然从图 3(a) 可以发现利用 Den Hartog 得到的最优频率比和与本文结合 Den Hartog 最优阻尼比下的最优频率比基本一致, 特别是在质量比小于 0.05 时差别很小(图中从左至右标记点对应质量比为 0.01~0.1), 另外图 3(b)的 $(Z_0 / Z_t)_{\min}$ 随质量比的变化情况类似。从图 3(b)看, 显然最优参数下的 $(Z_0 / Z_t)_{\min}$ 都较小, 即有较高的耗能效率, 表明采用 Den Hartog 优化是合理的, 因此本文在后续分析将用其优化 TMD 的参数。



(a) Den Hartog 与本文分析参数对比



(b) 最优参数下的 $(Z_0 / Z_t)_{\min}$

图 3 NT 系统的 TMD 参数

Fig.3 Parameters of TMD NT system

3 数值论证

3.1 数值对比分析

本文将通过算例来对混合控制系统进行研究。假定原结构的基本周期为 1, 质量为 1, 阻尼参数 $r_0 = 1$ (相应的主结构阻尼比为 0.01), 混合系统的其他参数如表 1, 其中 NT 表示混合系统, NT_nes 表示混合系统中的 NES, NT_tmd 表示混合系统中的 TMD。分析时, 假定初始能量集中于主结构中且只有初速度, 即脉冲激励(也可采用初位移或两者相结合形式), 单纯 NES 的刚度及混合系统 NT_nes 的刚度均按所给初始速度 $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$ 进行设计, 相应的慢变系统初始能量采用 $E_{0\text{int}i}$ 计算, 最优刚度取值略高于式(18)所得设计刚度。系统的能量耗散率可用下式表示:

$$E_{\text{diss}} = c_j \int_0^{t_1} (\dot{x}_j(\tau) - \dot{x}(\tau))^2 d\tau / E_{\text{rel}0} = c_j \int_0^{t_1} |u(\tau)|^2 d\tau / E_{\text{rel}0} \quad (24)$$

注意这里的 $E_{\text{rel}0} = 0.5m\dot{x}^2(0) + 0.5kx^2(0)$ 表示实际的初始能量, 而不是慢变系统能量分析中的初始能量 $E_{0\text{int}i}$; $|u(t)|$ 表示相对速度绝对值^[4], 其数值预示着能量耗散率的变化情况; 并用初始能量耗散比重表示为 $\eta = 1 - E_{\text{diss}}$ 。考虑到实际能量与处理后的能量单位不统一, 为分析方便后面的分析中均不给出相应单位。

表 1 分析参数
Table 1 Parameters for analysis

	TMD	NES		NT	
				NT_nes	NT_tmd
质量比	0.02	0.01	0.02	0.01	0.01
阻尼参数	$\xi_{opt} = \sqrt{3\mu / (1 + \mu)} / 8$	$\gamma_n = 0.1$	$\gamma_n = 0.1$	$\gamma_n = 0.1$	$\xi_{opt} = \sqrt{3\mu / (1 + \mu)} / 8$
最优刚度参数	$f_{opt} = 1 / (1 + \mu)$	$k_{n0} = 330$	$k_{n0} = 680$	$k_{n0} = 330$	$f_{opt} = 1 / (1 + \mu)$

图 4 给出了系统仅单纯 TMD 及单纯 NES(质量比 0.01 与 0.02) 控制的主结构实际能量 ($E_0 = 0.5m\dot{x}^2 + 0.5kx^2$) 变化情况。图 4 三图的耗能情况表明 TMD 的耗能效率与初始能量无关, 而 NES 则与初始能量紧密相关, 比如在 $\dot{x}(0) = 0.09\text{m/s}$, 略低于按速度脉冲为 0.1 m/s 初始能量设计情况下, 质量比为 0.01 与 0.02 时的 NES 耗能效果均较差; 但超过初始设计能量脉冲 0.1 m/s 后耗能效果变好, 相比于更大的初始能量脉冲 0.2 m/s,

0.12 m/s 接近初始设计能量脉冲(图 4(b)), 其耗能效果更好, 也更接近 TMD 的耗能效果, 特别在 0~3 s 时最为接近, 仅在 7 s~10 s 有差别, 且在质量比大时更有利于减振。

图 5 给出了图 4 初始能量下 NES 和 TMD 的 $|u(t)|$ 随时间的变化图, 在 $\dot{x}(0) = 0.09\text{m/s}$, NES 的 $|u(t)|$ 变化缓慢逐渐缩小且数值不大, 表明耗能缓慢, 而 TMD 的 $|u(t)|$ 在前期就出现较大值, 8 s 左右已经衰减到了较小值, 这说明其耗能迅速。当大于设计初始能量值时, 如 $\dot{x}(0) = 0.2\text{m/s}$ NES 有较好的耗能效果; 比如 NES 质量比为 0.02 的情况, 由于 NES 存在非线性, 前期 0~15 s 会出现其他比例的内共振, 此时 $|u(t)|$ 数值虽然相对较大, 但由于 NES 与主结构存在着能量交换, 系统能量耗散相对缓慢, 直到能量接近设计初始能量时产生 TET 现象(15 s~20 s), 此时的主结构能量向 NES 单向输入, $|u(t)|$ 数值迅速变小, 从而产生高效耗能; 当质量比为 0.01 时情况类似, 仅 TET 现象出现的时间不同。

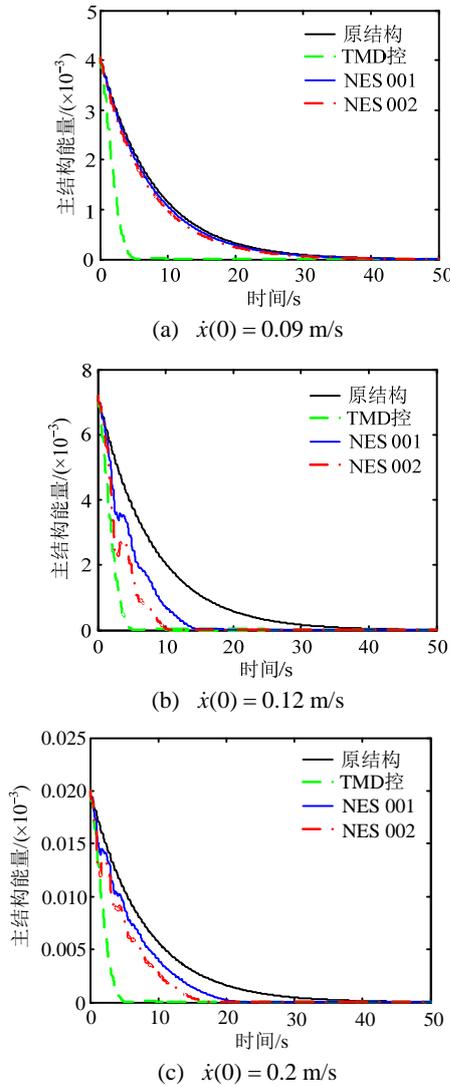


图 4 主结构能量
Fig.4 Energy of main structure

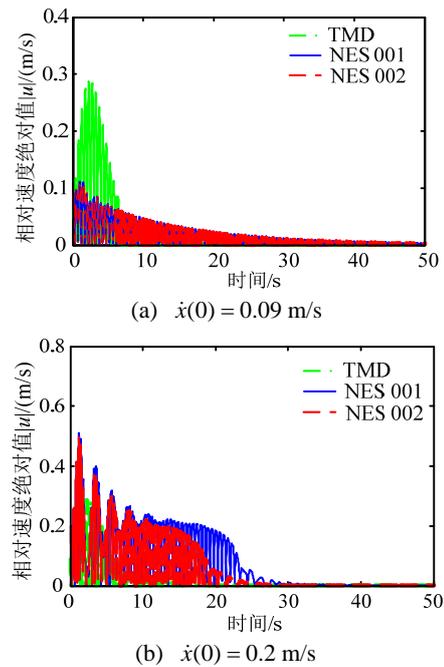


图 5 不同初始能量下的 $|u(t)|$
Fig.5 $|u(t)|$ under different initial energy of main structure

图6给出了单纯NES的理论能量预测与数值分析的对比,其中①号线为理论能量预测曲线,其余为数值分析曲线($E_n = R_n^2 = |\phi_{n10}|^2 = \dot{y}_n^2 + \omega_0^2 y_n^2$): ②号线 $\dot{x}(0) = 0.09 \text{ m/s}$, ③号线 $\dot{x}(0) = 0.12 \text{ m/s}$, ④号线 $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$ 。由图6(a)NES质量比为0.01时,显然在脉冲激励 $\dot{x}(0) = 0.09 \text{ m/s}$ 的数值曲线(②号线)没有超越峰值点,此时没有出现TET现象;当 $\dot{x}(0) = 0.12 \text{ m/s}$ 大于 $\dot{x}(0) = 0.1 \text{ m/s}$,数值曲线(③号线)超越了峰值点,当能量消耗到谷点时,出现跳跃现象,此时表明产生了TET现象;当 $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$ 大于 $\dot{x}(0) = 0.1 \text{ m/s}$,相对于 $\dot{x}(0) = 0.12 \text{ m/s}$,其数值曲线(④号线)需绕行理论能量预测线更多周后达到谷点并产生跳跃,最终产生TET现象。图6(b)NES质量比为0.02时基本情况类似,此处不再详述。

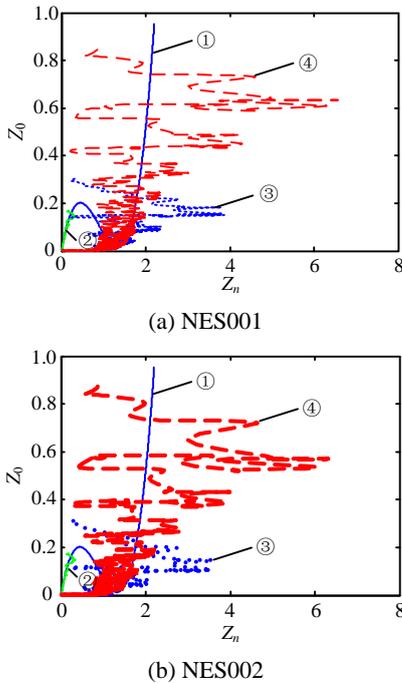


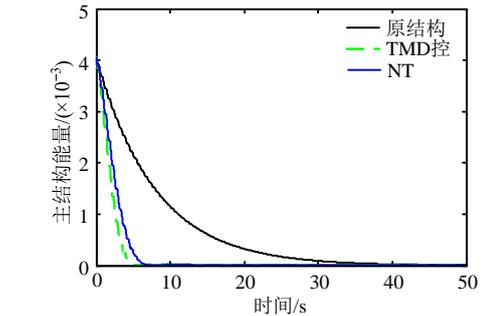
图6 理论分析与数值分析对比

Fig.6 Comparison between numeric simulation and theoretical prediction

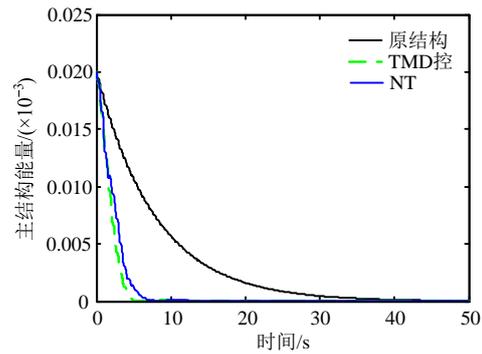
以上分析表明,初始能量对NES的耗能效果有很大的影响,而对TMD则无影响。接下来研究本文所提的混合系统的综合耗能效果。

图7描述了NT控制下的主结构能量变化情况。与单纯NES控制对比(图4(a)),图7(a)($\dot{x}(0) = 0.09 \text{ m/s}$)表明在小于设计初始能量时,NT仍然具有较好的耗能效果,且与单纯TMD控制的耗能效果相差不大;当初始能量大于设计值时,如图7(b)在 $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$ 脉冲激励下控制效果比 $\dot{x}(0) =$

0.09 m/s 更好;在对比图8与图5(b)后发现,单纯NES控制时,经过前期来回震荡,质量比为0.01与0.02的NES分别在23和15s左右才出现TET现象,而在NT中,在8s左右就已出现了TET现象。若初始能量超过但接近设计用的初始能量值得到相比 $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$ 和 $\dot{x}(0) = 0.09 \text{ m/s}$ 更好的结果,比如初始脉冲激励 $\dot{x}(0) = 0.12 \text{ m/s}$ 的情况,限于篇幅,未给出此图。因此,NT对初始能量的敏感性较低。



(a) $\dot{x}(0) = 0.09 \text{ m/s}$



(b) $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$

图7 主结构能量

Fig.7 Energy of main structure

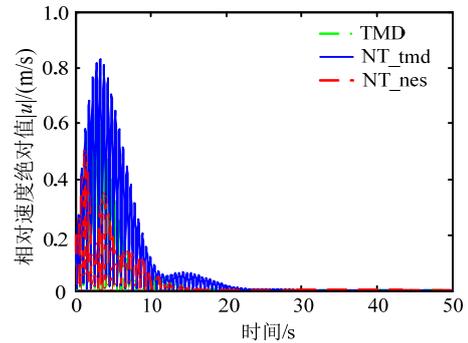


图8 $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$ 对应的 $|u(t)|$

Fig.8 $|u(t)|$ under initial energy $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$

图9给出了NT的理论能量预测与数值分析的数据对比情况(线型信息同图6)。对比图9(a)与图6的单纯NES控制,观察到在NT_nes数值能量曲线($\dot{x}(0) = 0.12 \text{ m/s}$ 与 $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$)围绕理论预测曲

线来回震荡环节更少，更快趋近于靶能量的阈值，即到达谷点产生跳跃，这说明 NT_nes 的靶能量出现情况与单纯 NES 的一样，在理论谷底处附近出现跳跃，但由于设计参数未考虑主结构阻尼，以及受到 NT_tmd 的影响，靶能量的出现会有一些影响。图 9(b)的 NT_tmd 取最优参数时的耗能效率一直都很高，特别在初期围绕理论预测曲线来回震荡，数值计算能量减小迅速，这说明 NT_tmd 与主结构接近共振时，NT_tmd 在吸收能量的同时同样具有较大的耗能作用，即使吸收能量达到最大值(Z_t 坐标值最大处)后也具有很强的耗散作用(Z_0 / Z_t 比较小)；在经过初期能量的吸收与耗散后，系统主结构能量很快变小，但 NT_tmd 能量仍旧围绕理论的能量曲线来回震荡呈减少趋势(图 9(b)缩略图)，这也从一定程度上说明本文的理论分析能量曲线是正确的。那么总体来看，理论能量预测曲线可以认为是数值分析能量在某种意义上的均值表现。

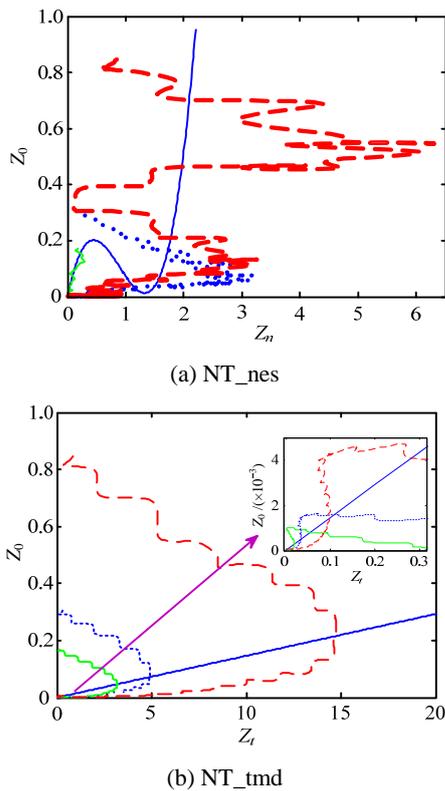


图 9 NT 的理论分析与数值分析对比

Fig.9 Comparison between theoretical prediction and numeric simulation for NT

3.2 最优设计的鲁棒性分析

减振系统除了具有高效耗能效果外，鲁棒性的好坏也是一个重要的指标，显然单纯的 TMD 控制对频率鲁棒性较差限制了它在很多领域中的应用，

而 3.1 节的分析又表明单纯的 NES 控制对初始能量条件过于敏感，因此 NT 的鲁棒性分析就显得尤为重要。

图 10 给出了不同控制方案下，能量耗散率、初始条件和主结构频率比(主结构变化后频率与原固有频率之比)变化的三维关系图。很明显，相对于 NES 和 TMD，NT(图 10(a))不但拓宽了频带，而且降低了对初始能量敏感性；尽管 NES(图 10(b))具有较宽的频带，但低于设计初始能量脉冲激励下的能量耗散率很低，而超过初始能量一定程度后能量耗散率也很快降低，不过在某些部位会出现如 1:3 等比例内共振^[21]也具有一定耗散率；TMD(图 10(c))

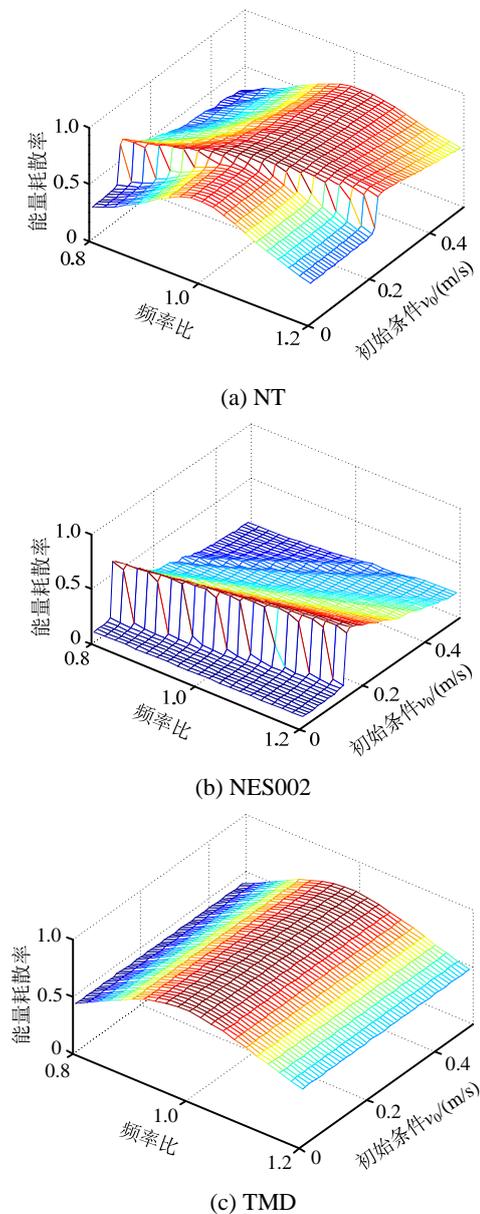


图 10 鲁棒性分析

Fig.10 Robustness analysis

则与传统研究情况一样, 仅对频率敏感。图 11 给出了主结构在固有频率(基本周期)时, 结构能量耗散比重与初始条件的关系。通过分析可以得到图 10 对初始能量相同的结论; 对比图 11(a)与图 11(b), 显然 NT 有效降低了初始能量附近的突变。因此, 综上所述, NT 无论是对初始能量还是对频率均具有较好的鲁棒性。

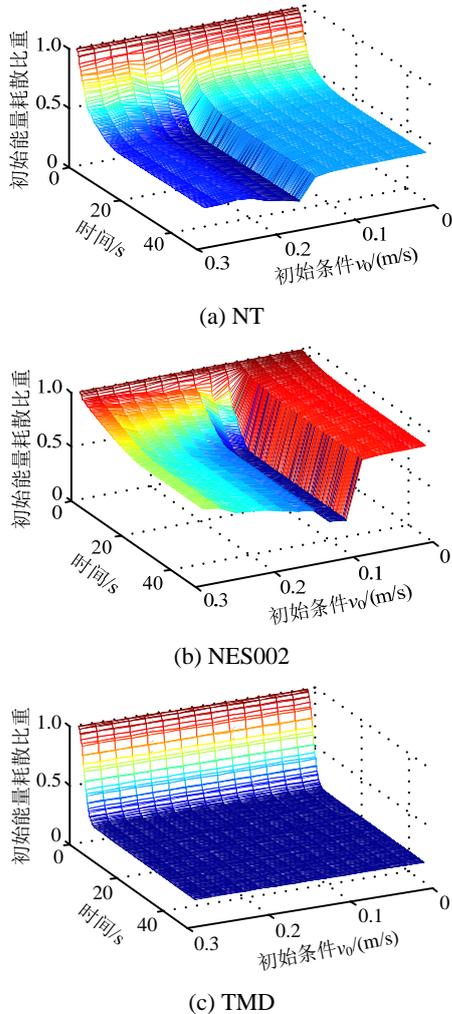


图 11 初始条件的鲁棒性分析

Fig.11 Robustness analysis of initial condition

4 结论

本文提出了利用非线性能量阱与调谐质量阻尼器并联的混合控制策略, 结合复变量平均法和多尺度法推导了结构的近似慢变系统及其理论能量预测方程。经理论与数值分析表明:

(1) NT 中主结构与非线性能量阱理论预测能量呈三次方关系, 而与调谐质量阻尼器成线性关系。

(2) 相比单纯的 NES 系统, 混合系统中的非线性能量阱更快出现靶能量现象, 并且具有较高的耗

能效率。混合系统的非线性能量可参考单纯的非线性能量阱系统的最优刚度参数设计, 同样都在所设计的初始能量附近出现靶能量现象。

(3) 数值计算的能量曲线围绕理论能量预测曲线变化, 证实了理论分析的准确性; 混合系统具有很好的鲁棒性, 不仅拓宽了频带, 而且降低了对初始能量的敏感性。

综上所述, 本文提出的混合非线性能量阱系统耗能高效, 并具有较好的鲁棒性, 但关于混合系统的总质量比, NES 与 TMD 所占质量比对整个系统的耗能效果影响有待进一步分析。

参考文献:

- [1] Gendelman O, Manevitch L I, Vakakis A F, et al. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part I—Dynamics of the underlying hamiltonian systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(1): 34—41.
- [2] Vakakis A F, Gendelman O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: Part II—Resonance capture [J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(1): 42—48.
- [3] Quinn D D, Gendelman O, Kerschen G, et al. Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1:1 resonance captures: Part I [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 311(3): 1228—1248.
- [4] Sapsis T P, Vakakis A F. Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1:1 resonance captures: Part II, analytical study [J]. Journal of Sound & Vibration, 2009, 311(3): 297—320.
- [5] Petit F, Loccufer M, Aeyels D. The energy thresholds of nonlinear vibration absorbers [J]. Journal of Lipid Research, 2008, 49(2): 332—9.
- [6] Manevitch L I. The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables [J]. Nonlinear Dynamics, 2001, 25(1): 95—109.
- [7] Manevitch L I, Gourdon E, Lamarque C H. Parameters optimization for energy pumping in strongly nonhomogeneous 2 DOF system [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2007, 31(4): 900—911.
- [8] Manevitch L I, Gourdon E, Lamarque C H. Towards the design of an optimal energetic sink in a strongly inhomogeneous two-degree-of-freedom system [J]. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74(6): 1078—1086.
- [9] Manevitch L I, Musienko A I, Lamarque C H. New analytical approach to energy pumping problem in strongly nonhomogeneous 2DOF systems [J]. Meccanica, 2007, 42(1): 77—83.

(参考文献[10]—[21]转第 82 页)

- [8] FEMA 350 Recommended seismic criteria for new steel moment-frame buildings [S]. Washington D C: Federal Emergency Management Agency, 2000.
- [9] GB50011-2010, 建筑抗震设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
GB50011-2010, Code for seismic design of buildings [S]. Beijing: China Architecture Industry Press, 2010. (in Chinese)
- [10] GB/T24195-2009, 金属和合金的腐蚀酸性盐雾、“干燥”和“湿润”条件下的循环加速试验[S]. 北京: 中国标准出版, 2009.
GB/T24195-2009, Corrosion of metals and alloys-Accelerated cyclic tests with exposure to acidified salt spray, ‘dry’ and ‘wet’ conditions [S]. Beijing: China Standards Press, 2009. (in Chinese)
- [11] GB228-2002, 金属材料室温拉伸试验方法[S]. 北京: 中国标准出版社, 2002.
GB228-2002, Metallic materials Tensile testing Method of test at ambient temperature [S]. Beijing: China Standards Press, 2002. (in Chinese)
- [12] 施刚, 张海涛, 侯和涛, 等. 加热炉带壁板足尺钢结构抗震性能试验研究[J]. 工程力学, 2014, 31(12): 40—46.
Shi Gang, Zhang Haitao, Hou Hetao, et al. Experimental study on the seismic performance of full scale petrochemical furnace steel structure with wall panel [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(12): 40—46. (in Chinese)
- [13] 贾连光, 孙宏达, 王春刚. 蜂窝式钢框架结构抗震性能试验研究[J]. 工程力学, 2012, 29(7): 147—153.
Jia Lianguang, Sun Hongda, Wang Chungang. Experimental research on seismic behavior of cellular steel frame [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(7): 147—153. (in Chinese)
- [14] 姚谦峰. 土木工程结构试验[M]. 第 2 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008: 219—222.
Yao Qianfeng. Civil engineering structural experiment [M]. 2nd ed. Beijing: China Architecture Industry Press, 2008: 219—222. (in Chinese)

(上接第 72 页)

- [10] Nguyen T A, Pernot S. Design criteria for optimally tuned nonlinear energy sinks—part 1: transient regime [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 69(1/2): 1—19.
- [11] Panagopoulos P N, Gendelman O, Vakakis A F. Robustness of nonlinear targeted energy transfer in coupled oscillators to changes of initial conditions [J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 47(4): 377—387.
- [12] Gourc E, Michon G, Seguy S, et al. Experimental investigation and design optimization of targeted energy transfer under periodic forcing [J]. Journal of Vibration & Acoustics, 2014, 136(2): 858—862.
- [13] Vaurigaud B, Savadkoochi A T, Lamarque C H. Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks. Part I: Design theory and numerical results [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 66(66): 763—780.
- [14] Savadkoochi A T, Vaurigaud B, Lamarque C H, et al. Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks, part II: theory and experiments [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(67): 37—46.
- [15] Savadkoochi A T, Vaurigaud B, Lamarque C H, et al. Efficient targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks: Theory and experiments [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(1): 37—46.
- [16] Gendelman O V, Sapsis T, Vakakis A F, et al. Enhanced passive targeted energy transfer in strongly nonlinear mechanical oscillators [J]. Journal of Sound & Vibration, 2011, 330(330): 1—8.
- [17] 张也弛, 孔宪仁, 杨正贤, 等. 非线性吸振器的靶能量传递及参数设计[J]. 振动工程学报, 2011, 24(2): 111—117.
Zhang Yechi, Kong Xianren, Yang Zhengxian, et al. Targeted energy transfer and parameter design of a nonlinear vibration absorber [J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(2): 111—117. (in Chinese)
- [18] 熊怀, 孔宪仁, 刘源. 一类立方非线性吸振器的能量传递和耗散研究及参数设计[J]. 振动工程学报, 2015, 28(5): 785—792.
Xiong Huai, Kong Xianren, Liu Yuan. Energy transfer and dissipation of a class of nonlinear absorber and its parameter design [J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(5): 785—792. (in Chinese)
- [19] 符川. TLCD-结构转化为 TMD-结构减振控制的研究[J]. 工程力学, 2016, 33(4): 114—120.
Fu Chuan. Vibration control of transforming TLCD-structure to TMD-structure [J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(4): 114—120. (in Chinese)
- [20] Den Hartog J P. Mechanical Vibrations [M]. 4th ed. New York: Mcgraw-Hill, 1956: 79—121.
- [21] Vakakis A F, Gendelman O V, Bergman L A, et al. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems [M]. Springer Science & Business Media, 2008: 98—108.