

基于有限元应力载荷宏观刚性滑裂面极限平衡 抗滑稳定计算理论

孙建生

(太原理工大学 水利科学与工程学院, 山西 太原 030024)

摘要: 针对重力坝深层复杂滑面抗滑稳定计算存在问题, 以彻底消除人为假设因素为目标, 提出有限元应力载荷宏观刚性滑裂面力学模型, 创立矢量力投影方向极值原理, 构建微观有限元应力和宏观极限平衡融合的客观定量稳定计算理论模型, 给出重力坝深层抗滑稳定弹塑性有限元应力荷载作用下, 宏观刚性滑裂面极值投影方向极限平衡方程和能量极值条件方程, 得到既满足平衡条件又具有能量极值特征的稳定安全系数客观定量解。通过算例考证, 阐明基于投影方向极值原理的有限元应力宏观极限平衡稳定计算理论的合理可靠性。成果对于重力坝深层抗滑稳定客观定量计算、完善坝基与边坡稳定统一分析理论具有重大理论研究意义和工程推广使用价值。

关键字: 边坡工程; 坝基及边坡; 抗滑稳定; 耗散力; 极值能量; 有限元极限平衡; 安全系数
中图分类号: P 64 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 6915(2018)04 - 0862 - 14

Theoretical model of stability calculation of macro-rigid sliding planes with FEM stress load based on limit equilibrium

SUN Jiansheng

(College of Water Resources Science and Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China)

Abstract: A mechanical model of macro-rigid sliding planes with the finite element stress load without the previous assumptions was put forward to resolve the problems in the calculation of anti-slide stability of deep and complex sliding planes of gravity dams. The principle of extreme projection direction of vector forces was proposed. The objective and quantitative method of stability calculation that combines the micro finite element stress with the macro limit equilibrium was established. The limit equilibrium equation and the energy extreme condition equation of macro-rigid sliding planes of the gravity dam against deep sliding under the elasto-plastic finite element stress load were given in the extreme projection direction. The objective safety factor accurately obtained not only satisfies the equilibrium condition but also has the extreme value of energy. The calculated results of examples are reasonable and reliable.

Key words: slope engineering; dam foundation and slope; anti-sliding stability; dissipation force; extreme energy; finite element limit equilibrium; safety factor

1 引言

边坡及坝基抗滑稳定问题是岩土工程重要研究

内容, 在稳定研究方法中融合有限元微观平衡理论应力计算成果, 彻底消除刚体极限平衡法的各种人为假设影响, 促进边坡及坝基抗滑稳定客观定量计算理论的发展, 无疑具有重大的理论研究和工程使

收稿日期: 2017 - 10 - 23; **修回日期:** 2017 - 11 - 29

作者简介: 孙建生(1958 -), 男, 硕士, 1981年毕业于太原工学院水利水电工程专业, 现任副教授, 主要从事水工结构及其抗振方面的教学与研究。E-mail: SJSD1053@163.com

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.1369

用价值^[1-2]。目前相关计算方法存在的主要问题简述如下:

点应力安全系数法^[3], 完全基于有限元微观点的应力平衡条件, 得到每个点的抗滑稳定安全系数, 但难于给出体系宏观整体抗滑稳定评价的安全系数, 并且不方便与规范及其它研究方法对比。

滑裂面切向力代数和法^[4-5], 基于有限元应力的切向力代数和宏观平衡, 得到整体抗滑稳定安全系数, 但把方向不同滑裂面的切向力代数和和有悖于力的矢量性原理(仅考虑了力的数值求和)。

滑裂面矢量力特征方向投影平衡法^[6-9], 基于有限元应力切向矢量力在投影方向的宏观平衡考虑, 可得到满足力矢量特性的整体抗滑稳定安全系数, 但矢量力投影特征方向人为确定又抹杀了安全系数评价稳定的客观定量性, 不同投影方向安全系数变化较大影响敏感, 降低了安全系数稳定评价的公信力。

考虑坝基面数值场应力分布的刚体极限平衡 Sarma 法^[10-12]及其改进法^[1], 只是为了避免刚体分界面通过坝体的不合理现象, 借助数值分析成果确定坝基面上的应力分布(改进法考虑了滑裂面中点的正应力为初值), 仍然采用多滑面刚体极限平衡原理, 但人为确定刚体分界面方向的本质就是在假设分界面上作用力的方向, 分界面方向对安全系数有影响, 也存在人为假设因素降低了客观性。

有限元强度折减法^[13-17]和超载法^[13-17], 通过逐步降低坝基材料的抗剪强度力学参数或逐步增大坝体的水平荷载, 观察塑性变形发展情况判断抗滑稳定程度。存在的表面问题是: (1) 失稳判据及其标准存在争议, 各种本构模型及失稳判据的一致定量性存在差异; (2) 考察特征点的位移突变及塑性区域的连通情况判别抗滑稳定, 必然含有一定人为主观模糊判断; (3) 超载和强度折减的影响范围并非仅仅局限于潜在滑裂面上, 而是影响整个坝基岩层, 改变了坝基岩体客观存在的应力变形场特征, 难于确切地反映沿潜在可能滑移通道的真实塑性形态; (4) 塑性迭代计算收敛精度对突变点安全系数影响敏感。实质问题是: 真实受力学状态与求解安全系数时滑裂面极限平衡概念状态考虑范围的混淆问题, 也就是, 把滑裂面上极限平衡求解安全系数的力学概念状态扩大到研究区域力学实际模型受力状态的力学模型思维混淆问题。滑裂面的极限平衡抗滑稳定计算模型状态与研究域的塑性极限真实状态, 是 2 个不同力学思维概念, 当真实受力模型状态的极限平衡影响范围仅局限在可能滑裂面时 2 个状态才能

相同。

通过土质边坡稳定标准算例考证的矢量和法^[6], 为什么应用到三峡大坝深层抗滑稳定研究($K = 2.112$)和有限元强度折减法^[14]($K = 3.5 \sim 4.0$ 最大可达 6.5)竟然会有如此大差异? 已载入建筑设计规范的传递系数法, 运用于具有反倾向滑裂面的岩质边坡稳定或重力坝深层抗滑稳定计算时^[18]为什么也会与有限元强度折减法存在较大差异? 边坡稳定计算理论与重力坝深层抗滑稳定理论的区别和统一究竟在哪里? 究竟哪一种稳定计算理论方法才可能是安全系数的真实解呢?

对于一个确定的滑裂面, 当人们不知道其上的应力分布时, 却通过各种人为假设条件能够计算出沿滑裂面的抗滑稳定安全系数—采用保守力学理论刚体极限平衡方法; 当人们一旦确定了滑裂面上的应力分布时, 却左右为难—微观理论应力成果与宏观抗滑稳定计算理论在力学平衡考虑矛盾, 丧失了理论依据进入理论盲区成为世界级难题, 不知道究竟应当如何计算抗滑稳定安全系数才是正确的理论方法。甚至一旦计算结果与刚体极限平衡方法有差异, 要么质疑有限元极限平衡稳定计算方法—因为没有理论根据, 要么怀疑确定应力分布的有限元理论可靠性—因为原本就不知道应力分布的确切规律, 为什么不质疑各种假设条件下得到不同结果的刚体极限平衡方法的可靠性呢? 这种奇怪现象的存在难道还不应当引起人们思考?

有限元应力计算成果属于满足应力-应变本构关系与变形协调的微观平衡理论产物, 抗滑稳定安全系数计算属于宏观极限平衡理论研究范围, 两大理论范畴有机融合的有限元成果极限平衡抗滑稳定计算理论模型, 必然具有无比优越特性, 同时也必然要有与之相适应的全新理论依据和思维概念。

2 投影方向极值原理

复杂滑裂面稳定问题, 观察各滑面所承受的滑动力和可用抗滑力分布情况可知, 滑动力与可用抗力在各滑面上的比值不一样, 且滑体的上下区域滑面方向不同。因此, 沿滑面切向的滑动力合矢量与体系安全系数 K 时的可用抗滑力合矢量作用方向不一样, 必然存在夹角, 且夹角大小与滑裂面形态和各面的抗剪力学参数及法向、切向受力有关。当滑裂面的法向应力保持平衡, 有限元切向应力成果进行宏观抗滑稳定平衡研究时, 就成为非共线不平衡

耗散力体系—非保守力学理论研究范畴，夹角与安全系数的大小变化无关。那么，矢量力平衡投影方向，对于安全系数具有十分明显影响，夹角愈大非共线不平衡力影响愈大。矢量力平衡投影方向与滑动力方向愈接近安全系数就愈小，与可用抗滑力方向越接近则安全系数越大。因此，人为假设投影方向必然使得安全系数具有主观因素影响。若要最大限度地减小这种影响只有2种可能：一是减小夹角，二是减小滑动力矢量与抗滑力矢量的合矢量投影影响。但当边界条件一定时夹角固定，那么只能减小后者。故：投影方向必须是滑动力矢量与可用抗滑力矢量的合矢量投影误差影响最小的方向，也就是总合矢量的垂直方向其投影为0，用耗散力学理论观点解释就是体系不平衡合力的垂直方向耗散力影响最小。

投影方向极值原理定义：在所有可能投影方向中，滑动力与可用抗滑力矢量的总合矢量力滑动所做功具有极小值的方向，滑动破坏时所消耗的能量最小而体系滑动变形能达到最大。即非共线不平衡合力所做的功最小而体系的变形能达到最大，沿此滑动方向投影所确定的安全系数才是客观唯一的真实解。

投影极值方向确定的安全系数是客观真实解的理论根据是误差影响最小理论，也是潘家铮^[19]的滑坡破坏最大最小值原理的延伸和实际应用。矢量力投影方向极值原理采用滑动方向极值原理表述为：复杂滑面滑动时，如有许多滑动方向，则失稳时，它将沿着总矢量力做功最小的一个矢量方向滑移破坏，极限平衡时，耗散能量最小而体系变形能最大，不平衡耗散力由体系内部消耗自动平衡。

投影方向极值原理的力学理论解释：随着安全系数的变化，滑面上可用抗滑力的大小不断变化，在所有可能抗滑力中，若受力系统达到共线平衡时沿任意方向位移所做的功为0，那么，系统处于平衡时的抗滑力所对应的安全系数就是客观真实解。但是，对于非共线不平衡系统，随着安全系数的变化可用抗滑力与滑动力的合力方向及大小不断变化，仅有一个虚功平衡方程确定不了安全系数和不平衡耗散力2个未知量，可以有无数组适合方程的解，只有在垂直于耗散力方向的任意位移才能外力做功为0，即：投影方向必须是垂直于耗散力方向，才能与共线平衡系统具有同样的位移虚功原理效应。这就是投影方向极值原理的力学理论解释，也是微观有限元应力成果宏观极限平衡稳定计算为什

么不能像一般共线平衡受力系统那样投影方向可以任意选取的真正原因。

同理，对于非共线不平衡受力耗散系统的力矩中心点位置必须满足力矩中心位置极值原理：复杂滑面滑动时，如有许多转动瞬心，则失稳时，它将绕着总矢量力抵抗矩最小、消耗能量最小而转动变形能量最大的一个转动瞬心滑移破坏。即，力矩中心位置必须选在滑动力与可用抗滑力的合力作用线上，破坏时体系耗散能量最小而可用抗滑力的转动做功最大，由力矩极限平衡条件所确定的安全系数才是客观真实解。

根据投影方向极值原理可以解释为什么边坡稳定有限元应力极限平衡计算方法不能直接用于重力坝深层抗滑稳定计算，就是因为边坡稳定计算方法没有考虑滑动方向极值原理，而实际边坡滑动力与可用抗滑力的作用方向夹角较小，因此，极限平衡投影方向人为采用滑动力方向或抗滑力方向的安全系数计算系统误差较小，对于夹角较大的岩质边坡和重力坝深层抗滑稳定计算必须按照投影方向极值原理计算才能得到合理可靠结论。否则，当夹角较小时计算结果只能是近似值，当夹角较大甚至可能是谬误。

3 投影方向极值原理数学模型

有限元应力宏观极限平衡抗滑稳定研究计算模型见图1, 2。把有限元微观平衡滑裂面的应力计算成果视为滑裂面上作用的外荷载—力学真实模型状态的一侧(实际上滑面两侧每一点的微观真实应力是平衡的故称实态)。抗滑稳定计算切向宏观刚性滑裂面极限平衡概念模型定义：考虑滑裂面的每一点及法向受压力时具有微观变形应力协调特性，即法向压应力大小及分布遵守微观平衡条件(实态)，而考虑切向及宏观极限平衡抗滑稳定时具有刚性特质(计算抗滑稳定安全系数的力学宏观极限平衡概念模型状态，故称为概念)。切向宏观刚性滑裂面概念定义明确了力学模型的真实状态与滑裂面安全系数计算力学概念模型状态的区别与内在联系，界定了微观应力平衡与宏观稳定极限平衡条件的思维范围，融合了有限元应力平衡与宏观抗滑稳定极限平衡两大理论体系基本概念。

那么，宏观刚性滑裂面极限平衡抗滑稳定计算脱离体见图2(b)(概念)，图中， $T_1 = \sum_{i=1}^{el} \tau_{1i} l_{1i}$ 简写

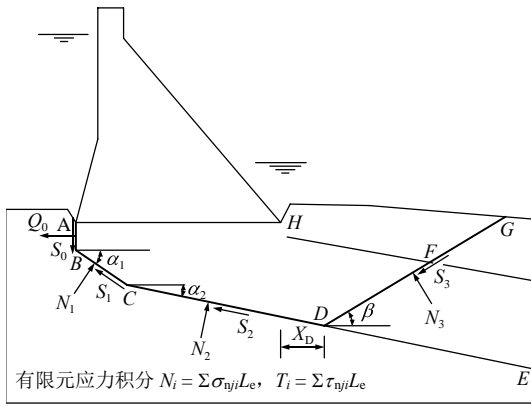
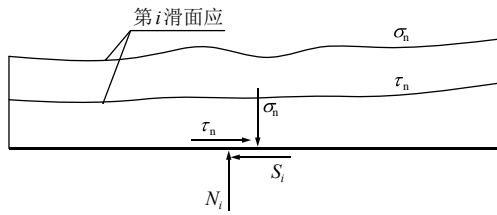
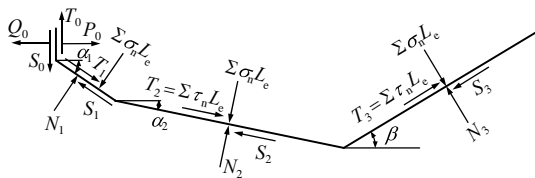


图 1 有限元计算模型

Fig.1 Finite element calculation model



(a) 滑裂面宏观极限平衡模型



(b) 有限元应力载荷宏观刚性滑裂面极限平衡抗滑稳定模型

图 2 滑裂面应力宏观极限平衡稳定模型

Fig.2 A macroscopic limit equilibrium stability model of sliding planes with the stress

$T_1 = \sum \tau_n L_e$ 表示沿着 1 面的切向力求和, 把 $\sum_{i=1}^{ej} \sigma_{nji} l_i$ 简写成 $\sum \sigma_n L_e$ 表示沿着 j 面的法向力求和; l_i 为通过单元长度就是图 L_e ; σ_{nji} , τ_{nji} 分别为第 j 滑裂面上第 i 单元的法向应力和切向应力, l_i 为滑裂面通过第 i 单元的长度; S_j , N_j 分别为第 j 滑裂面下的切向和法向作用力; α_j 为第 j 滑裂面的水平倾角。对于每个单一滑裂面的宏观极限平衡计算模型(见图 2(a)), 根据法向保持微观应力平衡条件, 滑裂面法向宏观平衡条件可得:

$$N_j = \sum_{i=1}^e \sigma_{nji} l_i \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中: e 为滑裂面通过单元数目。

切向荷载: $T_j = \sum_{i=1}^e \tau_{nji} l_i$, 在滑面安全系数 K_j 时的切向宏观极限平衡条件可得

$$\frac{S_j}{T_j} = \frac{N_j \frac{f_j}{K_j} + A_j \frac{c_j}{K_j}}{T_j} = \frac{f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{nji} l_i + \frac{c_j}{K_j} A_j}{\sum_{i=1}^e \tau_{nji} l_i} = 1 \quad (2)$$

即

$$K_j = \frac{f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{nji} l_i + c_j A_j}{\sum_{i=1}^e \tau_{nji} l_i} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

式中: f_j , c_j , A_j 分别为第 j 滑裂面的抗剪断摩擦因数、黏结力和滑裂面面积。

对于坝踵铅直面 AB 的拉应力及剪切应力极限平衡条件可知, 法向抗拉存在:

$$K_{0n} = \frac{Q_0}{P_0} = \frac{\sigma_{\text{抗拉}} L_{0l}}{\sum_{i=1, el} \sigma_{0拉i} l_i} \quad (4)$$

切向抗剪存在:

$$K_{0s} = \frac{S_0}{T_0} = \frac{f_0 \sum_{i=1, ey} \sigma_{压i} l_i + c_0 (L_{0y} + L_{0l})}{\sum \tau_{0i} l_i} \quad (5)$$

式(4), (5)中: el , ey 分别为滑裂面通过受拉、受压区单元数目。

模型 AB 面是专为坡顶或坝踵受拉区域考虑设计的, 当考虑受拉区开裂时受拉面积 $L_{0l} = 0$; 当无受拉力区域时式(4)不计入模型即可。

由于各滑裂面的安全系数不同而且差异较大, 那么对于重力坝宏观整体的深层抗滑稳定安全系数究竟是多少? 这个问题就如同单一平面的极限平衡力学概念模型状态思维是一样的: 每个点的应力状态不同, 但都采用同一安全系数评价, 实际上每个点切向在此安全系数时并非极限平衡, 不平衡切向力通过点间的传递达到宏观切向受力极限平衡, 因为是在同一平面方向笔者可以简单理解为平均受力效应的极限平衡, 很容易被接受认可。但是, 对于多滑面问题的抗滑稳定安全系数计算, 就是本文宏观刚性滑裂面模型定义的极限平衡状态, 体系整体稳定安全系数计算就必须按宏观整体极限平衡考虑, 即各滑裂面的每一个点均具有同一安全系数 K 时, 则每一滑平面各点可提供的沿滑面方向的抗滑力之和为

$$S_j = \frac{f_j}{K} \sum_{i=1}^e \sigma_{nji} l_i + \frac{c_j}{K} A_j \quad (j=0, 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

AB 面可提供抗拉力之和为

$$Q_0 = \frac{1}{K} \sigma_{\text{抗拉}} L_{0l} \quad (7)$$

当考虑抗拉与抗剪安全系数要求不同时,模型中实际使用的 $\sigma_{\text{抗拉}}$ 为抗拉允许安全系数除以抗剪允许安全系数的折合允许应力。

在体系安全系数 K 下,各滑面上可提供的抗滑力 S_j 与切向应力载荷 T_j 是共线非平衡力,当且仅当 $K_j = K$ 时为共线平衡力(对于 AB 面还包括拉应力载荷关系),不平衡力通过刚性滑裂面的连接节点传递达到宏观整体极限平衡。这种连接节点上的不平衡力传递,当各滑裂面在同一方向时不难理解,当各滑裂面不在同一方向时,即连接节点两侧受力成为非共线不平衡二力系统问题。如果始终站在保守理论力学观点范畴,并把安全系数计算概念模型状态误认为就是实态—连接节点就是一个孤立的空间实际点,来看待此问题时,那就永远不会理解也不可能理解,甚至会质疑本文力学理论模型为谬误。力的保守性仅是人们对客观事物主流性质的概化认识,而非主流的耗散特性被忽略的认识论观点,现实问题的任何一个滑动稳定受力现象都包括能量消耗的耗散力作用影响,考虑耗散问题才是自然规律本质现象的真实揭示。连接节点不是孤立的空间实点,是抗滑稳定安全系数计算模型状态的概念点,在耗散理论力学范畴中,体系的所有连接节点上的合力将在耗散力影响最小的方向上达到整体受力平衡,研究体系这些连接节点的平衡就等同于研究整个体系的平衡问题,因为研究整个体系时连接节点的受力成为体系的内力。故,复杂滑裂面有限元应力极限平衡抗滑稳定计算理论研究已经属于非保守耗散理论研究范畴,必须用耗散力极值条件的平衡关系才能获得理论真实解。关于这一理论范畴的清晰认识是正确理解本文模型属于理论计算模型的关键问题所在。

有限元方法具有严密的力学理论原理支持,如果在此平台上的抗滑稳定计算模型又具有以极值条件为理论基石的耗散理论原理支撑,那么由此力学模型计算得到的抗滑稳定安全系数还不能称其为理论解吗?难道还不具有无比优越特性和公信力吗?

当安全系数为 K 时图2(b)整体宏观极限平衡状态,在与水平夹角成 θ 的投影方向平衡条件可得

$$(P_0 - Q_0)\cos\theta + (T_0 - S_0)\sin\theta + \sum_{j=1}^2 [(T_j - S_j)\cos(\alpha_j + \theta)] + (T_3 - S_3)\cos(\beta - \theta) - \sum_{j=1}^2 \left[\sum_{i=1}^e \sigma_{n_{ji}} l_i \sin(\alpha_j + \theta) - N_j \sin(\alpha_j + \theta) \right] - N_3 \sin(\beta - \theta) + \sum_{i=1}^e \sigma_{n_{3i}} l_i \sin(\beta - \theta) = 0 \quad (8)$$

把每一滑裂面法线方向的平衡条件(实态)式(1)代入式(8)得

$$(P_0 - Q_0)\cos\theta + (T_0 - S_0)\sin\theta + \sum_{j=1}^2 [(T_j - S_j)\cos(\alpha_j + \theta)] + (T_3 - S_3)\cos(\beta - \theta) = 0 \quad (9)$$

把每一滑面切向可提供的抗滑力式(6), (7)(概态)代入式(9),可得安全系数计算式:

$$K = \left[\sum_{j=0}^2 \left(f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{n_{ji}} l_i + c_j A_j \right) \cos(\alpha_j + \theta) + \left(f_3 \sum_{i=1}^e \sigma_{n_{3i}} l_i + c_3 A_3 \right) \cos(\beta - \theta) + \sigma_{\text{抗拉}} L_{0l} \cos\theta \right] / \left[\sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^e \tau_{n_{ji}} l_i \cos(\alpha_j + \theta) + \sum_{i=1}^e \tau_{n_{3i}} l_i \cos(\beta - \theta) + \sum_{i=1, el} \sigma_{0\text{拉}i} l_i \cos\theta \right] \quad (10)$$

由式(10)可知安全系数 K 随投影方向 θ 的变化而变化。某一个安全系数 K 必然对应于一个特定的投影方向 θ ,在此安全系数下每一个滑裂面方向的可用抗滑力 S_j 与滑动力 T_j 是共线非平衡力(当 $K_j = K$ 时为共线平衡力);整个体系的抗滑矢量力 S 由各滑裂面的可用抗滑力 S_j 组成,体系的滑动矢量力 T 由各滑裂面的滑动力 T_j 组成,体系的抗滑矢量力 S 和滑动矢量力 T 是非共线力,在特定的投影方向 θ 上极限平衡。

各滑裂面上的共线不平衡力 $T_j - S_j$ 在垂直于特定投影方向 θ 的合力若具有最小值,也就是可用抗滑力 S_j 矢量合与滑动力 T_j 矢量合的总矢量力 F_{st} 具有最小值—耗散力具有最小值。垂直于投影方向的不平衡力的合力 F_{st} 为

$$F_{st} = \sum_{j=0}^2 (T_j - S_j) \sin(\alpha_j + \theta) - (T_3 - S_3) \sin(\beta - \theta) + (P_0 - Q_0) \sin\theta \quad (11)$$

由 $\partial F_{st} / \partial \theta = 0$ 为求解体系总矢量力最小的极值条件,同样可以得到式(10)。即,由式(10)确定的安全系数不仅是表达了特定方向的体系抗滑稳定受力极限平衡条件,而且包含着满足体系极限平衡条件时,总不平衡矢量力处于极小值—体系的总耗散力为极小值更深一层次的物理力学含义。更确切地说,式(10)确定的安全系数不仅是符合保守理论极限平衡要求,同时也具有耗散理论范畴极值基本原理根据。此为投影方向极值原理的第一层极小值概

念。

式(10)包含了 2 个未知量 K 和 θ ，可以有无穷组适合方程的解，那么哪一组解才是体系客观真实稳定安全系数解呢？许多学者提出了不同的投影方向计算方法，如滑动力方向^[4, 6, 20]、抗滑力方向^[7, 9]、下游主抗滑面方向^[21]，对于非共线不平衡受力系统人为确定平衡投影方向的力学实质是在假设不平衡合力的方向，都有人为假定误差因素影响，不可能是理论解^[22]。

根据本文创立的投影方向极值原理第二层极值概念：(1) 滑动破坏极限平衡时，体系不平衡耗散力消耗的能量最小，即各滑面的不平衡力在体系总耗散力方向的分力(总不平衡矢量力方向的分力)沿不平衡力自身产生的可能虚位移所做功最小；(2) 滑动破坏极限平衡时，体系不平衡力产生的变形能达到最大，即各滑裂面的不平衡抗力在体系滑动方向的分力(极值投影方向的分力)沿不平衡抗力自身可能虚位移所做的功最大，即体系抵抗滑移破坏的变形能量达到最大。

不平衡力在总耗散力方向的分力 $(T_j - S_j) \cdot \sin(\alpha_j + \theta)$ ，不平衡力产生的可能虚位移正比于 $(T_j - S_j)$ 反比于滑面剪切变形刚度 $G_j L_j$ ，方向沿着滑裂面方向，所以体系耗散总能量：

$$W_{\theta \perp} = \sum_{j=0}^2 (T_j - S_j)^2 \frac{1}{G_j L_j} \sin^2(\alpha_j + \theta) + (T_3 - S_3)^2 \cdot \frac{1}{G_3 L_3} \sin^2(\beta - \theta) + (P_0 - Q_0)^2 \frac{1}{E_0 L_{0l}} \sin^2 \theta \quad (12)$$

同理沿滑动方向(极值投影方向)的体系变形总能量为

$$W_{\theta} = \sum_{j=0}^2 (T_j - S_j)^2 \frac{1}{G_j L_j} \cos^2(\alpha_j + \theta) + (T_3 - S_3)^2 \cdot \frac{1}{G_3 L_3} \cos^2(\beta - \theta) + (P_0 - Q_0)^2 \frac{1}{E_0 L_{0l}} \cos^2 \theta \quad (13)$$

由极值条件 $\frac{\partial W_{\theta \perp}}{\partial \theta} = 0$ 或 $\frac{\partial W_{\theta}}{\partial \theta} = 0$ 均可得

$$\sum_{j=0}^2 (T_j - S_j)^2 \frac{1}{G_j L_j} \sin(2\alpha_j + 2\theta) - (T_3 - S_3)^2 \cdot \frac{1}{G_3 L_3} \sin(2\beta - 2\theta) + (P_0 - Q_0)^2 \frac{1}{E_0 L_{0l}} \sin(2\theta) = 0 \quad (14)$$

把式(6), (7)及 $T_j = \sum_{i=1}^e \tau_{nji} l_i$, $P_0 = \sum_{i=1, el} \sigma_{0\text{拉}i} l_i$ 代入式(14)并化简可得

$$a \frac{1}{K^2} - 2b \frac{1}{K} + c = 0 \quad (15)$$

则

$$K = \frac{a}{b \pm \sqrt{b^2 - ac}} \quad (16)$$

其中，

$$a = \sum_{j=0}^2 \left(f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{nji} l_i + c_j A_j \right)^2 \frac{1}{G_j L_j} \sin(2\alpha_j + 2\theta) + (\sigma_{\text{抗拉}L_{0l}})^2 \frac{1}{E_0 L_{0l}} \sin(2\theta) - \left(f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{n3i} l_i + c_3 A_3 \right)^2 \cdot \frac{1}{G_3 L_3} \sin(2\beta - 2\theta)$$

$$b = \sum_{j=0}^2 \left(f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{nji} l_i + c_j A_j \right) \sum_{i=1}^e \tau_{nji} l_i \frac{1}{G_j L_j} \sin(2\alpha_j + 2\theta) + \sigma_{\text{抗拉}L_{0l}} \sum_{i=1, el} \sigma_{0\text{拉}i} l_i \frac{1}{E_0 L_{0l}} \sin(2\theta) - \left(f_j \sum_{i=1}^e \sigma_{n3i} l_i + c_4 A_4 \right) \sum_{i=1}^e \tau_{n3i} l_i \frac{1}{G_3 L_3} \sin(2\alpha_3 - 2\theta)$$

$$c = \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{i=1}^e \tau_{nji} l_i \right)^2 \frac{1}{G_j L_j} \sin(2\alpha_j + 2\theta) - \left(\sum_{i=1}^e \tau_{n3i} l_i \right)^2 \cdot \frac{1}{G_3 L_3} \sin(2\beta - 2\theta) + \left(\sum_{i=1, el} \sigma_{0\text{拉}i} l_i \right)^2 \frac{1}{E_0 L_{0l}} \sin(2\theta)$$

联立式(10), (16)两个方程，可以唯一定量地确定安全系数 K 和投影极值方向角 θ 。

2 个方程式在推导过程中的表面形式是以方向一致且力学指标相同的 4 个平面给出，仅仅是为了论述方便和读者更易理解，当把平面域缩小到一个点理论原理仍然适合，只是数学公式形式不同而已。故，本文模型原理可以针对每一个实际点的宏观整体抗滑稳定安全系数研究。

4 计算原理方法步骤及计算程序过程

(1) 采用成熟的弹塑性有限元程序，如：ANSYS, ADINA, ABQUS, FLAC^{3D} 等，计算考虑塑性变形影响的应力场并将计算成果导出保存。

(2) 根据工程实际地质条件确定可能滑裂面形态，或部分滑裂面按搜索方法确定，本文计算采用搜索下游反向滑裂面的起始位置 X_D 及倾角 β 的方法参见孙建生和侯爱民^[23]的研究。

(3) 根据滑裂面形态计算各滑裂面通过单元的法向应力和切向应力，确定滑裂面上的作用荷载。

根据有限元应力微元体的任意斜截面的应力计算公式，确定指定斜截面上计算点的法向正应力和切向剪应力分布：当计算点在单元中按单元应力双

向线性插值确定；当点在单元边上按单元节点距离线性插值，并且相邻单元的插值结果取平均；当点在节点上采用绕节点单元应力的平均值。

(4) 依据投影方向极值原理计算安全系数。

依据以上原理开发研制与 ANSYS 分析软件数据接口的 FORTRAN 90 语言通用计算程序，程序计算方法包括投影方向极值原理平衡法、滑裂面有限元应力代数和法、滑动合力矢量方向及抗滑合力矢量方向投影平衡法等。

有限元应力宏观极限平衡抗滑稳定计算程序总框图见图 3。

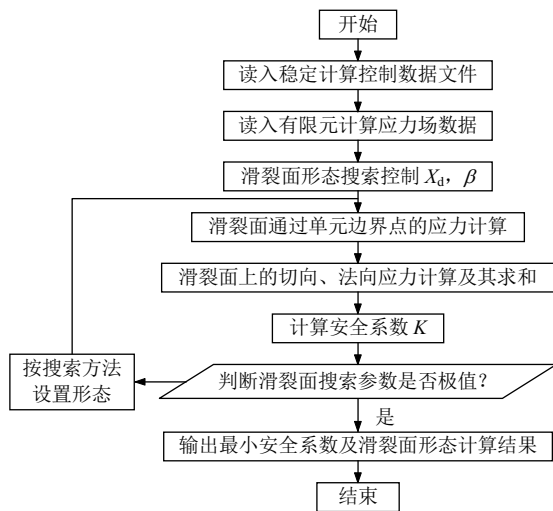


图 3 应力载荷极限平衡抗滑稳定计算程序总框图

Fig.3 Flowchart of calculation for anti sliding stability with limit equilibrium under stress load

5 计算理论模型算例合理性论证

5.1 投影极值方向计算理论模型通过标准考题 EX1C 和 EX3B 的考证

为了方便读者检验本文研究理论模型及相应结

论的正确可靠性，首先选用具有刚体极限平衡法计算结果的边坡标准考题算例 EX1C 及 EX3B(澳大利亚计算机协会 ACADS 边坡稳定计算程序考题)，考题具体尺寸及计算参数见陈祖煜^[24]的研究。计算结果及相关研究文献的成果一并列入表 1。

本文考题有限元应力场计算采用 ANSYS 软件的 D-P 模型，塑性屈服准则根据应力空间莫尔 - 库仑六棱锥相等底面积圆锥条件确定^[25]。抗滑稳定计算影响区域的单元边长最大不超过 0.25 m。自重分为 10 个荷载增量子步，计算机时 3 min(机型 2008 年联想启天 M690E)。考题 EX1C 为非均质边坡，没有给出相应最危险滑裂面的圆心坐标及半径，本文采用自编的土坝边坡稳定程序 EDSP 简化毕肖普法计算确定的最危险滑裂面的圆心坐标(34.52 m, 43.44 m)半径 19.111 m(分条 30 个)，并与陈祖煜^[24]给出最危险滑裂面图形对比高度重合。考题 EX3B 为坡底含有软弱土层的给定折线滑裂面的边坡稳定计算问题。

考题 ANSYS 有限元应力计算成果等效塑性应变见图 4。考题滑裂面上的滑动力、相应安全系数时实际提供的抗滑力、投影极值方向及耗散力的方向大小见图 5，每个箭头表示一段计算面。下面为计算结果分析论证。

(1) 有限元等效塑性应变云图输出最小单位 10^{-3} (小于 0.001 为灰色区)，由图 4 可知：

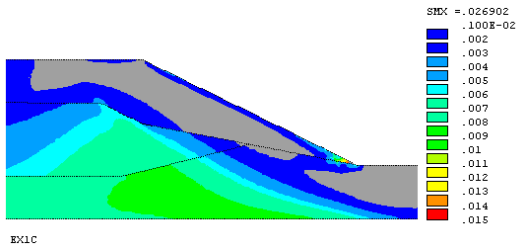
EX1C 最大值 26.9×10^{-3} 位于坡脚，大部分区域在 15×10^{-3} 以内，最危险滑面通过距坡脚水平 0.5 m 的点属于较大塑性应变区；坡内滑面通过区域基本在 5×10^{-3} 以下的有色区；坡顶偏下较小区域通过小于 1×10^{-3} 的灰色区。

EX3B 最大值 73.1×10^{-3} 位于软弱层内，滑面通过软弱层区域 $31 \times 10^{-3} \sim 62.7 \times 10^{-3}$ 的较大塑性变形

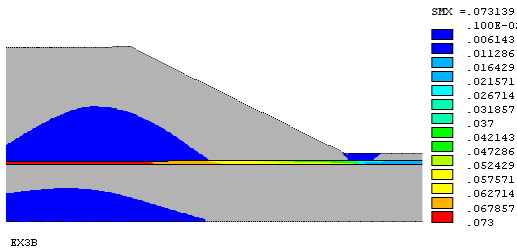
表 1 标准考题 EX1C 及 EX3B 安全系数计算结果汇总

Table 1 Safety factors of the standard test questions EX1C and EX3B

计算方法	计算程序	考题 EX1C		考题 EX3B		备注
		安全系数	相对差异/%	安全系数	相对差异/%	
刚体极限平衡法	推荐裁判答案 Donald	1.390 0	-2.96	1.340	-0.31	本文研究成果有限元应力精度：考题 EX1C 滑体总重：1 529.10 kN；有限元滑面应力铅直：1 530.44 kN，水平：4.77 kN。考题 EX3B 滑体总重：3 547.03 kN；有限元滑面应力铅直：3 556.95 kN，水平：2.90 kN； θ 负投影角(推导向上为正)
	SSA(Baker)	1.390 0	-2.96	1.37	+1.88	
	STAB(陈祖煜 ^[24])	1.385 0	-3.33	1.265	-6.26	
	GWEDGEM	1.390 0	-2.96	1.34	-0.31	
	EMU	1.390 0	-2.96	1.34	-0.31	
	Fredlund	1.406 0	-1.79	1.261	-6.60	
	EDSP(孙建生自编土坝郑宏等 ^[2])	1.386 3	-3.23	1.338	-0.46	
本文有限元法	投影方向极值理论解	1.431 1/ $\theta=45.533 0^\circ$		1.344 2/ $\theta=39.857 3^\circ$		考题 EX1C 滑动矢量方向投影：葛修润 ^[4] 1.384/21.51°；有限元强度储备 1.578；刘艳章等 ^[6] 1.389/21.28°
	应力代数和法	1.419 4	-0.82	1.341 7	-0.19	
	滑动合力矢量方向投影	1.411 9/ $\theta=21.910 1^\circ$	-1.34	1.346 9/32.304 5°	+0.20	
	抗滑合力矢量方向投影	1.413 3/ $\theta=23.685 0^\circ$	-1.24	1.347 2/31.446 6°	+0.22	



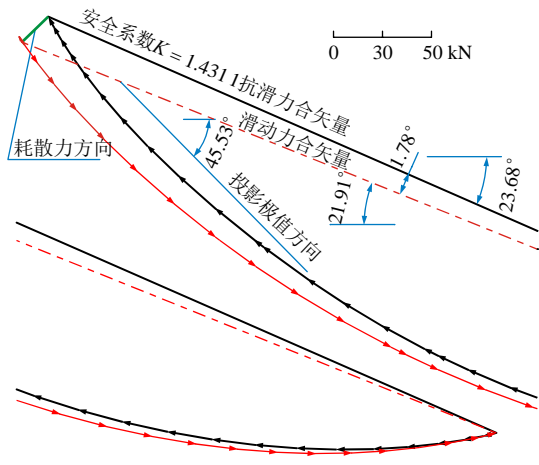
(a) 考题 EX1C



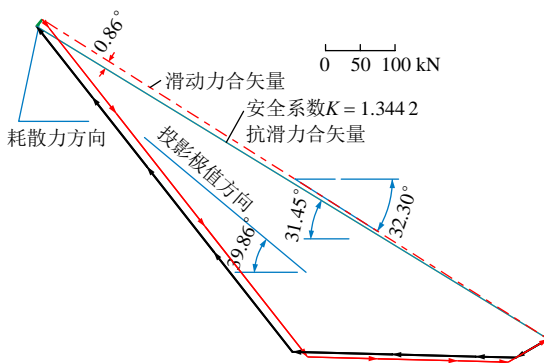
(b) 考题 EX3B

图 4 等效塑性应变云图

Fig.4 Equivalent plastic strain distribution



(a) 考题 EX1C



(b) 考题 EX3B

图 5 矢量平衡图

Fig.5 Diagrams of vector balance

滑裂面通过区域的等效塑性应变数值大小反应了滑裂面上的剪应力分布特征，数值越大塑性发展越充分，剪应力就越接近极限剪切强度或等于之，分布曲线越平缓。如果各段滑裂面尺寸相近：则滑裂面的滑动力矢量的相对大小关系可以间接反应剪应力的分布特征和塑性程度，矢量力大小越接近剪应力分布越均匀塑性变形发展越充分；在高塑性区正应力分布也趋于均匀，抗滑力矢量力的大小相对关系也间接反应了法向应力分布均匀程度，但逆论不一定成立，抗滑力矢量分布均匀未必就一定是塑性区。这些观点是塑性力学理论基本概念原理，读者可以依此考查本文稳定理论模型得到矢量图关系和 ANSYS 有限元软件计算得到塑性区分布关系是否吻合。

(2) 图 5 是根据投影方向极值原理相应的安全系数计算输出每一滑面的滑动力和实际使用抗滑力数值，按比例通过 CAD 精准绘制矢量大小方向得到，图 5 中采用自动标注的矢量方向角与计算值吻合，可用来检验本文不同计算方法结果的矢量方向及安全系数是否正确，并且与理论模型原理是否具有最直观相互印证。由图 5 可知：

2 个土质边坡稳定计算考题的滑动力矢量与抗滑力矢量的方向夹角分别为 1.78° 和 0.86°，因夹角较小，人为选择投影方向安全系数计算结果受耗散力影响也小，矢量平衡图揭示了投影方向的差异，表 1 中按滑动力矢量方向和按抗滑力矢量方向计算结果与投影方向极值理论解差别较小。同时也进一步说明如果仅仅按土质边坡稳定考题对比考证的计算模型，特别是通过安全系数接近 1 的考题对比考证，是不适用于重力坝深层抗滑稳定模型情况，不仅是夹角大而且安全系数要求也大，误差正比于两者的乘积。计算成果数据印证了矢量投影方向极值理论考虑矢量夹角影响的合理科学性。

EX1C 滑裂面通过区域的等效塑性应变值数值较小且变化幅度小，滑面的滑动力和抗滑力比较均匀变幅不大，2 个合矢量的夹角主要由中上部滑面的滑动与抗滑力分布变化形成。

EX3B 软弱层及坡脚反向滑面的滑动力和抗滑力大小变化更接近均匀已经为塑性特性，特别是反向滑面的阻滑效果已经丧失，故对夹角影响很小。所以，具有反向滑面的土质边坡当不考虑其塑性按弹性或刚体计算时会比考虑了塑性影响的安全系数计算结果要偏大。

(3) 由抗滑稳定安全系数计算表 1 可知：

带；坡脚反向滑面通过区域最大值 15×10^{-3} 一般在 11.2×10^{-3} 以内，坡脚塑性区域范围较大；坡内滑面通过区域接近有色区的灰色区带小于 1×10^{-3} 。

EX1C 投影方向极值理论解安全系数为 1.431 1 比其它简化方法计算结果都大。比刚体极限平衡 1.39 大 2.92%，比应力代数和法 1.4194 大 0.82%。

EX3B 投影方向极值理论解安全系数为 1.344 2 与其它简化方法结果差异 -6.60% ~ +1.83%。比刚体平衡 1.34 大 0.31%，比应力代数和法 1.341 7 大 0.19%。

综合以上分析可以得出研究结论：

① 对于一个塑性影响小且通过区域均匀的滑面，投影方向极值理论解大于所有刚体平衡方法安全系数解约 3%，说明现行简化方法此时是偏于安全的；② 但对于一个塑性影响较大(滑动能量较大)的滑裂面，特别是反倾向滑面的塑性区域较大时，刚体极限平衡法已经接近或有些方法已大于本文模型理论解，表明此时刚体极限平衡有些方法简化存在一定安全隐患；③ 在滑动力与抗滑力矢量夹角较小的土质边坡稳定计算时，滑裂面有限元应力代数和法的计算结果是最接近理论解并且略偏于安全的，而沿滑动力合矢量方向投影或抗滑力合矢量方向投影平衡方法计算结果相对于理论模型解具有波动性，当塑性区域影响小时小于理论解，而塑性区域影响大时大于理论解，具有稳定安全隐患，故不能被推广采用。

滑裂面滑动能量的不同(滑裂面通过塑性区域塑性程度不同)，刚体极限平衡方法与本文理论解的相对接近程度揭示了刚体极限平衡简化条件的实际偏差，突显了本文理论模型安全系数解与滑动能量影响的滑动可能性具有密切关联性。

5.2 重力坝深层抗滑稳定算题考证

根据规范^[26]附录 E 推荐的重力坝深层双斜面等安全系数刚体极限平衡抗滑稳定计算方法(简称双

斜面法)，选择适用算题主要控制尺寸：坝高 98 m，坝顶宽 8 m，坝底宽 73.5 m，上游水深 95 m 下游水深 0，坝基排水孔扬压力折减系数 0.25(折减点距坝踵 9 m)，坝体容重 24 kN/m³。坝踵处软弱层深度 5.5 m、倾向下游 5°、厚度 0.03 m，抗剪断强度 $f_1 = 0.6$ ， $c_1 = 0.25$ MPa。岩体的抗剪断 $f_2 = 1.0$ ， $c_2 = 1.2$ MPa，岩体容重 26 kN/m³。

双斜面法计算时，坝踵到软弱面按开裂考虑并计入上游水压力作用。下游坝趾处铅直分界面上的作用力倾角分别按水平方向 $\psi = 0^\circ$ (简称双一法)、按下岩层的抗剪摩擦因数及安全系数考虑倾角^[27] $\psi = \tan^{-1} f_2 / K$ (简称双二法)。根据搜索计算确定下游最危险滑裂面的倾角 β 分别为 31.90° 和 23.36° 对应最小安全系数已列入表 2。

考虑有限元塑性变形影响的应力场计算模型参数见表 3。稳定计算影响域单元边长最大尺寸 0.3 m。模型共计剖分单元 115 390 个，求解自由度 231 732 个。自重分为 2 个荷载步施加，水压力分为 4 个荷载步施加，每一个荷载步又分为 4 个荷载增量步，塑性迭代收敛计算控制条件采用不平衡力平方和的开方小于 0.001 倍施加力，扬压力按浮容重体积力施加，计算机时 22 min。上游坝踵岩层有限元应力计算过程采用实际工程情况。在投影方向极值稳定计算时，为了考证理论模型及程序与规范方法的对应情况分别按开裂和考虑抗拉折合强度 1.0 MPa 计算，并把坝基软弱层分为 3 段，模拟多滑面情况。有限元计算模型及加载见图 6。

根据 ANSYS 有限元单元塑性应力场，有限元极限平衡抗滑稳定计算成果见表 2。

根据 ANSYS 有限元计算成果等效塑性微应变的分布(由于软弱层厚度尺寸小无法全局图示，只给

表 2 规范双斜面法确定滑面形态的投影方向极值理论解、应力代数和法成果

Table 2 The safety factors of the sliding planes in the extreme projection direction, the algebraic sum of stress for the standard method

计算方法	双一：下游滑面倾角 31.90°		双二：下游滑面倾角 23.36°		备注
	安全系数 K	相对差异/%	安全系数 K	相对差异/%	
刚体极限平衡双一法	2.035 9	-30.40	2.1029	-26.24	
刚体极限平衡双二法	2.670 0/ $\psi = 20.532 5^\circ$	+0.57	2.566 6/ $\psi = 21.286 9^\circ$	-3.44	与规范方法对应坝踵 AB 面开裂考虑情况：有拉应力载荷，拉力区抗力为 0
投影方向极值理论解	2.654 8/ $\theta = 11.330 6^\circ$		2.683 0/ $\theta = 5.900 7^\circ$		
应力代数和	2.642 3	-0.47	2.667 2	-0.59	
滑动矢量力方向投影	2.617 1/ $\theta = 4.364 7^\circ$	-1.44	2.675 4/ $\theta = 3.894 3^\circ$	-0.03	
抗滑矢量力方向投影	2.653 5/ $\theta = 11.094 2^\circ$	-0.05	2.693 0/ $\theta = 8.522 5^\circ$	+0.37	
投影方向极值理论解	2.789 4/ $\theta = 8.768 3^\circ$		2.808 9/ $\theta = 3.933 2^\circ$		抗拉考虑情况：抗拉折合允许值按 1.0 MPa 考虑
应力代数和	2.841 0	+1.81	2.853 9	+1.58	
滑动矢量力方向投影	2.810 1/ $\theta = 4.364 7^\circ$	+0.74	2.808 7/ $\theta = 3.894 3^\circ$	-0.01	
抗滑矢量力方向投影	2.761 1/ $\theta = 11.947 9^\circ$	-1.02	2.835 1/ $\theta = 9.430 7^\circ$	+0.92	

表 3 弹塑性有限元模型计算参数

Table 3 Parameters of elastoplastic finite element model

材料	变形模量/MPa	泊松比	容重/(kN·m ⁻³)	浮容重/(kN·m ⁻³)	内摩擦角/(°)	黏结力/MPa
坝体砼	2.10×10 ⁴	0.167	24.0	14.0	58.50	1.872
坝基岩体	1.50×10 ⁴	0.22	26.0	16.0	45.00	1.200
夹层	0.25×10 ⁴	0.28	23.0	13.0	30.96	0.250
底部岩体	1.50×10 ⁴	0.22	26.0	16.0	软弱层以下的岩体按弹性计算	

出局部，输出等效塑性应变最小 10×10^{-6} ，软弱层等效塑性变最大值为 1.197×10^{-6} 位于坝趾下游 9 m 处，坝趾正下方 390×10^{-6} ，坝踵正下方 510×10^{-6} 且变化梯度远大于坝趾，坝基内软弱层在 10×10^{-6} 以下区域较大；坝踵点岩体塑性最大值 819×10^{-6} ，大于 150×10^{-6} 区域深度 3 m 带宽 2 m，见图 7；坝趾点处岩体塑性区域范围很小且最大值 150×10^{-6} 大部分在 25×10^{-6} 以下。重力坝深层稳定分析的真实受力状态塑性区域主要是软弱层及坝踵区域，下游主抗滑区的塑性影响与土质边坡稳定考题情况具有本质区别，因此，重力坝抗滑稳定计算模型仅通过土质边坡稳定考题的安全系数对比考查，本身就是

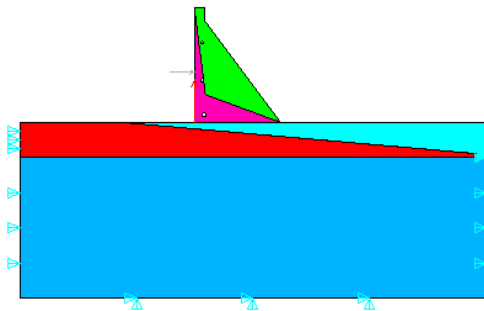


图 6 有限元计算模型及加载

Fig.6 Finite element calculation model and loading

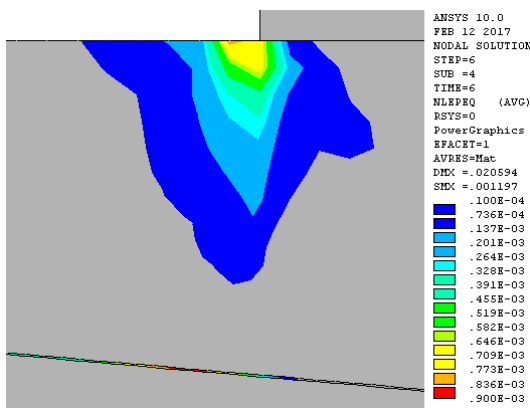


图 7 坝踵处等效塑性应变云图

Fig.7 Equivalent plastic strain distribution at the dam heel

塑性对于深层稳定影响力学概念不清的表现。通过对比安全系数大小相对差异评价方法可靠性的思维只适用于简化方法之间比较，而理论模型方法是通过滑动变形规律特征与安全系数计算结果的规律一致性进行论证，因为理论真实解不可能与简化方法解一致，否则，那怎么还能是理论模型解呢？如果完全一致，要么各种简化方法假设完全合理逼真，要么理论方法就一定是伪科学理论。

理论模型解与简化方法解的差异大小真正揭示了简化条件与实际情况的偏差所形成的误差，这种对比存在的差异大小正在告诉人们现行规范评价标准实际安全裕度究竟是多少，简化计算方法究竟还有没有再挖掘改良的余地。

对于同一坝基稳定问题：规范推荐的刚体极限平衡方法由于分界面上的作用力方向角假设条件的不同安全系数增大 2.035 9~2.566 6，相对变化 26.0%，而本文理论模型解方法不同安全系数增大 2.654 8~2.683 0，仅仅是因滑面形态变化增大 1.06%。这一点充分展示了本文模型解与简化方法存在本质区别和本文理论模型的研究意义重大。

纵观 4 个滑动面计算结果：对于一个滑动能量较小的滑面投影极值方向理论解安全系数最大(与滑动能量极值点对应)，其他简化方法都在能量较小一侧偏于安全的估计值，如 EX1C 滑面塑性小滑动能量小，又如塑性区一致但双斜面方法一的下游滑面倾角大，滑动能量相对小于下游滑面倾角平缓的双斜面法二的滑面；对于一个滑动能量较大的情况，滑动能量已经接近最大，因简化经验方法没有考虑滑动能量条件，就有可能偏离最大滑动能量实际情况，过高估计安全系数使计算结果超过本文的能量极值解而偏于危险。

应力代数和方法在力的矢量性力学概念上具有缺陷，虽然在土质边坡及重力坝深层抗滑稳定的考虑开裂情况与理论模型解差异较小，但是，当考虑上游抗拉性能时计算成果大于理论模型解，并且当考虑下游滑裂面位置时，应力代数和法始终大于理论解，偏于危险。但是，应力代数和法比人为设定滑动力方向投影或抗滑力方向投影计算成果与理论解的相对差异变化要小。本文认为应力代数和法也不宜用于坝基抗滑稳定计算研究。

重力坝深层稳定算例的法向、切向应力在水平铅直方向的分量计算值与理论值如下：

双斜面法一：理论值水压力 44 267.6 kN，铅直力 = 自重+岩重-扬压力-廊道重= 86 558.1 kN；

有限元滑裂面应力水平力 44 234.7 kN, 铅直力 86 499.6 kN, 相对误差 0.07%和 0.13%。

双斜面法二: 理论值水压力 44 267.6 kN, 铅直力 = 自重+岩重-扬压力-廊道重 = 87 365.1 kN;

有限元滑裂面应力水平力 44 204.1 kN, 铅直力 87 294.1 kN, 相对误差 0.14%和 0.08%。

图 8 为重力坝算例的投影方向极值原理计算结果矢量平衡图, 由图可知, 滑动力与抗滑力合矢量的夹角分别为 6.73° 和 4.63°, 远大于土质边坡稳定考题情况, 相应安全系数的软弱层实际抗滑力小于滑动力, 而下游主抗滑面的实际抗滑力大于滑动力, 是深层抗滑稳定计算模型不平衡力产生的主要因素, 也是坝基稳定计算不同于土质边坡稳定计算的根本原因。

图 9 为双斜面法二下游滑面倾角 $\beta = 23.36^\circ$, 耗散能量(式(12))、变形能量(式(13))及安全系数(式(10))随投影方向角 θ 的变化关系曲线, 由图 9 可知能量极值点位置与计算成果一致($\theta = 5.9007^\circ$)。

投影方向极值理论模型的合理可靠性论证到此应当自有结论, 为了本文研究成果的完整性和本文具有更大科学研究利用价值列出以下研究成果供读者参考。

根据本文理论模型并考虑下游滑裂面位置 X_D 及倾角 β 的搜索情况, 可得出:

(1) 当下游滑裂面折点位置就在坝趾处 $X_D = 0$ 时, 分别采用投影方向极值理论和应力代数和法, 搜索下游滑裂面倾角, 最危险滑面倾角相同 $\beta = 29.01^\circ$, 最小安全系数分别是 2.6536/ $\theta = 9.0672^\circ$, 2.6962。

对于现行规范仅考虑坝趾分界面时, 抗力角按水平 $\psi = 0^\circ$ 的双斜面法安全裕度为 30.34%, 即便是抗力角按 $\psi = \tan^{-1}(f_2 / K)$ 的双斜面法安全裕度为 3.39%。建议未来规范再次修订时在更多工程实际计算研究结论的基础上可以考虑推荐抗力角 $\psi = \tan^{-1}(f_2 / K)$ 的双斜面法稳定简化计算方法。

(2) 当下游滑裂面位置 X_D 及倾角 β 同时搜索:

理论模型解滑裂面 $X_D = 23.975 \text{ m}$, $\beta = 57.23^\circ$, 最小安全系数 2.226 5, 投影角 $\theta = 18.4508^\circ$; 应力代数和法 $X_D = 27.138 \text{ m}$, $\beta = 54.08^\circ$, 最小安全系数 2.326 4。应力代数和法安全系数大于理论解 4.49%, 存在安全隐患, 下游滑裂面位置起始点比理论解更靠下游, 远离了软弱层最大塑性点坝趾下游 9 m, 偏离了极值能量点。计算结果规律说明: 当建基面与下游岩层表面齐平时, 第二滑裂面起始不在坝趾处, 此种情况必须研究第二滑裂面的位置参数影响, 从变形能量角度考虑在软弱层最大塑性区下游的研究成果是可靠, 并且此时最小安全数与有限元强度折减法具有相互验证性。

本文采用 ANSYS 有限元 D-P 模型, 仅对软弱层的抗剪强度参数折减, 计算成果见图 10, 判断^[28]安全系数为 2.1~2.3, 强度折减系数 2.35 时有限元塑性迭代计算不收敛。

综上可得, 滑裂面有限元塑性应力载荷作用, 投影方向极值原理宏观刚性滑裂面极限平衡边坡和重力坝深层抗滑稳定计算理论模型, 不仅模型适用于复杂坝基滑裂面情况更贴近工程客观实际, 而且极限平衡方程求解方法消除了投影方向、刚体分界面人为假定不确定因素影响, 并考虑了滑动方向影响

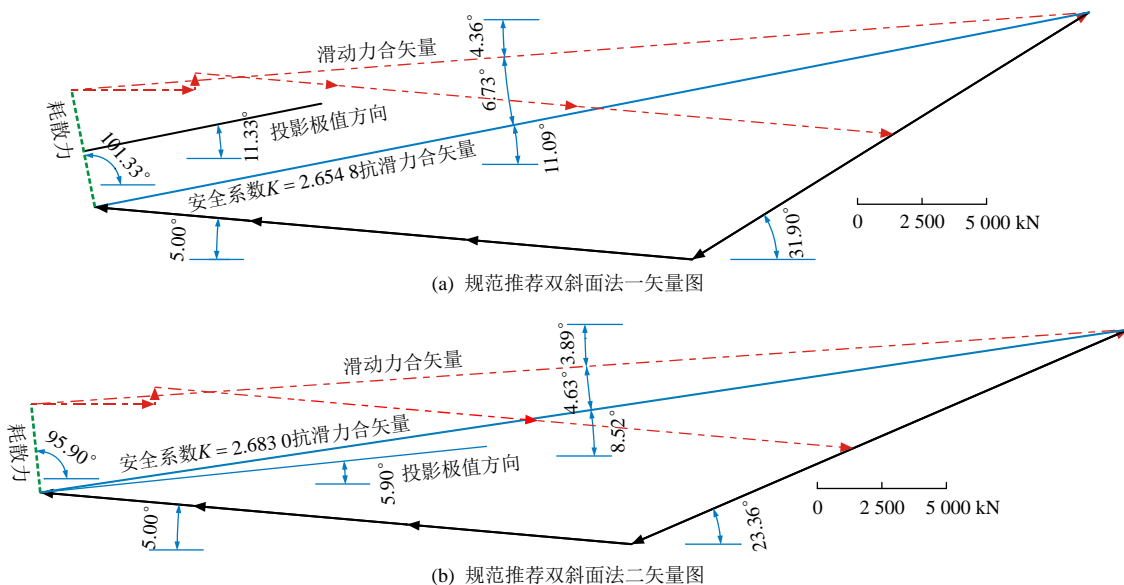


图 8 规范推荐刚体极限平衡等安全系数法考证算例矢量平衡关系

Fig.8 Diagrams of vector of limit equilibrium method with the same safety factor for example on Standard recommendation

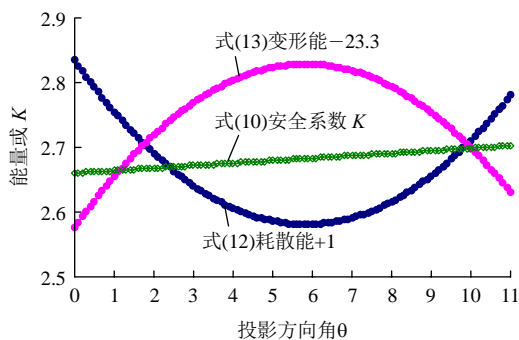


图 9 下游滑面 $\beta=23.36^\circ$ 能量、安全系数随投影角变化
Fig.9 Curves of energy and safety factor varied with the projection angle when lower plane $\beta=23.36^\circ$

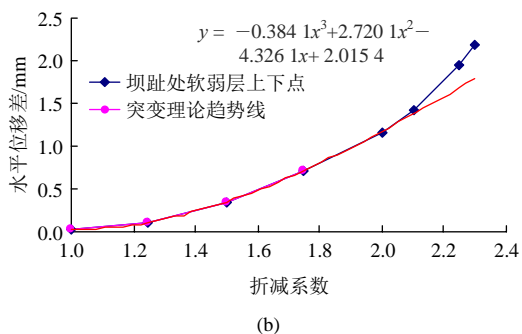
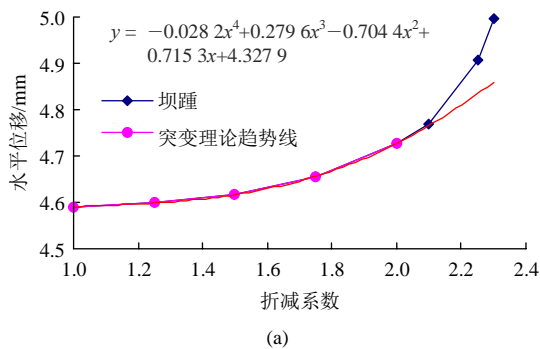


图 10 有限元强度折减法特征点位移随折减系数变化图
Fig.10 The curves of displacement at characteristic point varied with the strength reduction factor in finite element

的体系耗散能量和变形能量极值条件，安全系数计算结果规律与塑性变形影响规律相互印证更具客观必然规律性。给出边坡或坝基整体抗滑稳定唯一确定解的极小值安全系数计算成果，既满足投影方向极限平衡条件又符合滑动能量极值条件更具定量评价可靠性。模型在满足力学平衡和考虑塑性变形应力协调影响比刚体极限平衡双斜面法更加完备，等安全系数计算成果的唯一确定和计算过程避免变形应力场失真、揭示沿滑裂面的极限平衡抗滑稳定安全系数力学概念本质定义比有限元超载法或强度折减法更科学严谨。投影方向极值理论模型可以确定极值条件滑裂面位置形态，而且可给出具有最大变形

能的滑动方向，抗滑稳定安全系数求解过程限定条件最少具有客观定量理论解的特征规律。计算模型理论实质为 2 个极值条件方程确定，计算结果是仅依赖于有限元应力计算成果和边界条件的客观定量理论解。

6 结 论

- (1) 投影方向极值原理揭示了非共线不平衡耗散力系统的力学虚功原理和数学误差最小原理。
- (2) 本文计算理论模型，属于有限元微观平衡理论与宏观刚性滑裂面极限平衡有机融合的耗散理论能量极值研究成果。
- (3) 能量极值平衡方程是本文理论模型数学原理的核心内容，不仅把滑动稳定问题的滑动方向与滑动变形可能性的能量建立了内在必然联系，而且表达了体系在滑动能量一定条件下极限平衡的耗散能量与滑动变形势能的极值点客观规律特性，并使抗滑稳定安全系数与滑面的抵抗变形刚度的力学性能建立了联系，其力学概念本质是建立了抗滑稳定安全系数与有限元塑性应力变形能建立了力学内在联系。
- (4) 宏观极限平衡方程式的力学理论实质是不平衡耗散力极值条件方程。
- (5) 安全系数计算结果具有客观唯一定量特性，不仅反映了力的极限平衡关系，而且包含了耗散能量与变形能量平衡极值关系，安全系数计算公式直接含有刚度因子反应变形特征，应力载荷间接体现了应力 - 应变本构关系和塑性变形规律影响。
- (6) 理论依据：弹塑性应力载荷具有有限元力学理论依据、投影方向极值原理具有耗散力学理论支撑、刚性滑裂面极限平衡定义具有宏观理论概念支持。

参考文献(References):

[1] 朱大勇, 卢坤林, 台佳佳, 等. 基于数值应力场的极限平衡法及其工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(10): 1 969 - 1 975. (ZHU Dayong, LU Kunlin, TAI Jiajia, et al. Limit equilibrium method based on numerical stress field and its application to engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(10): 1 969 - 1 975. (in Chinese))

[2] 郑 宏, 谭国焕, 刘德富. 边坡稳定性分析的无条件法[J]. 岩土力

- 学, 2007, 28(7): 1 285 - 1 291.(ZHENG Hong, THAM Leslie george, LIU Defu. A slice-free method for stability analysis of slopes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(7): 1 285 - 1 291.(in Chinese))
- [3] 马建全, 王念秦, 张新社. 基于点稳定系数法的斜坡稳定性分析[J]. 吉林大学学报, 2015, 45(2): 533 - 540.(MA Jianquan, WANG Nianqin, ZHANG Xinshe. Analysis on slope stability based on local factor of safety[J]. Journal of Jilin University, 2015, 45(2): 533 - 540.(in Chinese))
- [4] 葛修润. 岩石疲劳破坏的变形控制律、岩土力学试验的实时 X 射线 CT 扫描和边坡坝基抗滑稳定分析的新方法[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(1): 1 - 20.(GE Xiurun. Deformation control law of rock fatigue failure, real-time X-ray CT scan of geotechnical testing, and new method of stability analysis of slopes and dam foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(1): 1 - 20.(in Chinese))
- [5] 杨利福, 常晓林, 周伟, 等. 基于离散元重力坝多滑面深层抗滑稳定分析[J]. 岩土力学, 2015, 36(5): 1 463 - 1 480.(YANG Lifu, CHANG Xiaojin, ZHOU Wei, et al. Deep anti-sliding stability of gravity dam with multiple sliding planes based on distinct element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(5): 1 463 - 1 480. (in Chinese))
- [6] 刘艳章, 葛修润, 李春光, 等. 基于矢量法安全系数的滑坡与坝基稳定分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(10): 2 130 - 2 140.(LIU Yanzhang, GE Xiurun, LI Chunguang, et al. Stability analysis of slope and dam foundation based on vector method safety factor[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(10): 2 130 - 2 140.(in Chinese))
- [7] 郭明伟, 葛修润, 李春光, 等. 边坡和坝基抗滑稳定分析的三维矢量法和其工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(1): 8 - 20.(GUO Minwei, GE Xiurun, LI Chunguang, et al. Three-dimensional vector sum method employed in slope and dam foundation stability analysis and its applications to practical engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(1): 8 - 20.(in Chinese))
- [8] WAN Y K, GAO Y F, ZHANG F. A simplified approach to determine the unique direction of sliding in 3D slopes[J]. Engineering Geology, 2016, 211(23): 179 - 183.
- [9] 沈华章, 张国发, 王水林, 等. 基于矢量分析法的边坡下滑推力计算[J]. 岩土力学, 2016, 37(4): 1 096 - 1 108.(SHEN Huazhang, ZHANG Guofa, WANG Shuilin, et al. Calculation of downslope thrust of slope based on vector analysis method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(4): 1 096 - 1 108.(in Chinese))
- [10] 杨志勇, 陈建康, 吴震宇, 等. 重力坝深层抗滑稳定多滑面计算方法探讨[J]. 四川大学学报, 2015, 47(增 1): 31 - 35.(YANG Zhiyong, CHEN Jiankang, WU Zhenyu, et al. Study on multi-slip surface calculation method for deep anti-sliding stability of gravity dam[J]. Journal of Sichuan University, 2015, 47(Supp.1): 31 - 35.(in Chinese))
- [11] 陈祖煜, 汪小刚, 杨健, 等. 岩质边坡稳定分析原理 - 方法 - 程序[M]. 北京, 中国水利水电出版社, 2005: 410 - 518.(CHEN Zuyu, WANG Xiaogang, YANG Jian, et al. Rock slope stability analysis - theory, method and program[M]. Beijing: China Water Power Press, 2005: 410 - 518.(in Chinese))
- [12] US Army Corps of Engineers. Gravity dams design[S]. [S. l.]: [s. n.], 1995.
- [13] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835 - 840.
- [14] 葛修润, 任建喜, 李春光, 等. 三峡左厂 3[#]坝段深层抗滑稳定三维有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(4): 389 - 394.(GE Xiurun, REN Jianxi, LI Chunguang, et al. 3D-FEM analysis of deep sliding stability of #3 dam foundation of left power house of the three Gorges Project[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(4): 389 - 394.(in Chinese))
- [15] ZIENKIEWICZ C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics[J]. Geotechnique, 1975, 25(4): 671 - 689.
- [16] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. 水利学报, 2003, 24(1): 21 - 27.(ZHANG Luyu, ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, et al. The feasibility study of strength-reduction method with FEM for calculating safety factors of soil slope stability[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003, 24(1): 21 - 27.(in Chinese))
- [17] 庞俊蕊, 孙伟, 王刚, 等. 重力坝深层抗滑稳定弹塑性有限元超载法分析[J]. 水力发电, 2015, 41(4): 43 - 45.(PANG Junrui, SUN Wei, WANG Gang, et al. Elastoplastic finite element analysis for deep stability against sliding of gravity dam with overload method[J]. Water Power, 2015, 41(4): 43 - 45.(in Chinese))
- [18] 张津生. 浅析刚体极限平衡法——探讨重力坝深层抗滑稳定的安全判据[J]. 水力发电学报, 2005, 24(5): 26 - 33.(ZHANG Jinsheng. Discussion on the rigid body limit equilibrium method —a probe of the criterion of the gravity dam safety factor against deep sliding stability analysis in the dam foundation[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2005, 24(5): 26 - 33.(in Chinese))
- [19] 潘家铮. 建筑物的抗滑稳定和滑坡分析[M]. 北京: 水利出版社, 1980: 84 - 119.(PAN Jiazheng. Stability analysis of structures and landslides[M]. Beijing: China Water Conservancy Press, 1980: 84 - 119.(in Chinese))
- [20] GE X R. Vector sum method: a new method for anti-sliding stability

- analysis[C]// Proceedings of the 12th ISRM international Congress on Rock Mechanics. [S. l.]: [s. n.], 2012: 209 - 214.
- [21] 孙 剑, 孙建生, 曹国珍, 等. 有限元应力积分等安全系数剩余推力法重力坝深层稳定分析研究[J]. 水力发电, 2016, 42(7): 45 - 48.(SUN Jian, SUN Jiansheng, CAO Guozhen, et al. Analysis of FEM stress integration under same safety factor with surplus thrust on deep stability of gravity dam[J]. Water Power, 2016, 42(7): 45 - 48.(in Chinese))
- [22] 孙建生. 对“基于矢量分析方法的边坡下滑推力计算”的质疑[J]. 岩土力学, 2018, 39(2): 776 - 783.(SUN Jiansheng. Inquiry on calculation of downslope thrust of slope based on vector analysis method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(2): 776 - 783.(in Chinese))
- [23] 孙建生, 侯爱民. 基于分项系数的三滑裂面相等可靠余度重力坝深层抗滑稳定计算方法[J]. 水利学报, 2013, 44(3): 367 - 372.(SUN Jiansheng, HOU Aimin. The calculation method for stability against deep sliding with three sliding planes under the same reliability-surplus of gravity dam based on partial factor[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2013, 44(3): 367 - 372.(in Chinese))
- [24] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析原理方法程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 335 - 376.(CHEN Zuyu. Soil slope stability analysis—theory, method and program[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 335 - 376.(in Chinese))
- [25] 赵尚毅, 郑颖人, 刘明维, 等. 基于 Drucker-Prager 准则的边坡安全系数定义及其转换[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(12): 39 - 61.(ZHAO Shangyu, ZHENG Yinren, LIU Minwei, et al. Definition and transformation of slope safety factor based on Drucker-Prager criterion[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(12): 39 - 61.(in Chinese))
- [26] 中华人民共和国水利行业标准编写组. SL319—2005 混凝土重力坝设计规范[S]. 北京: 水利水电出版社, 2005.(The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China SL319—2005 Design specification for concrete gravity dams[S]. Beijing: China Water Power Press, 2005.(in Chinese))
- [27] 常晓林, 王 辉, 周 伟, 等. 重力坝两种滑移失稳机理及安全度评价方法[J]. 水利学报, 2009, 40(10): 1 189 - 1 195.(CHANG Xiaolin, WANG Hui, ZHOU Wei, et al. Mechanism of two sliding failure modes in gravity dam and method for safety evaluation[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, 40(10): 1 189 - 1 195.(in Chinese))
- [28] 杨 硕, 孙建生, 孙 伟. 基于突变理论的重力坝失稳判据研究[J]. 水电能源科学, 2014, 32(7): 66 - 68.(YANG Shuo, SUN Jiansheng, SUN Wei. Research of gravity dam instability criterion based on catastrophe theory[J]. Water Resources Power, 2014, 32(7): 66 - 68.(in Chinese))SUN G H, HUANG Y X, LI C G, et al. Formation mechanism, deformation characteristics and stability analysis of Wujiang landslide near Centianhe reservoir dam[J]. Engineering Geology, 2016, 211(23): 27 - 38.