

水力作用下平面滑动岩质边坡极限 倾角解析计算

李 伟¹, 詹良通¹, 王 康²

(1. 浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310058; 2. 成都理工大学 管理科学学院, 四川 成都 610059)

摘要: 探究内部无确定滑面的平面滑动岩质边坡的最危险滑面位置和倾角, 有利于准确评价此类边坡稳定性, 对边坡设计分析具有重要的理论指导意义。考虑水力作用, 建立平面滑动岩质边坡力学模型, 通过函数求极值的方法, 得到极限倾角的统一解析解。考虑边坡前缘是否堵塞, 后缘是否存在拉张裂隙, 滑面上是否充水等实际情况, 滑面上采用合理的水压分布形式, 得到极限倾角的详细解析解。分析结果表明: 在一定范围内, 极限倾角随边坡高度、边坡坡角、滑面内摩擦角、岩体重度、水位高度增大而增大; 极限倾角随滑面黏聚力增大而减小; 当拉张裂隙深度增大时, 极限倾角先增大再减小; 不同水压分布模型得到的极限倾角存在差异; 同时, 边坡前缘排水条件对此类边坡极限倾角影响显著。该极限倾角解析解适用范围更广, 最后根据建立的解析解, 编写求解程序。

关键词: 边坡工程; 岩质边坡; 平面滑动; 极限倾角; 解析解; 边坡稳定性

中图分类号: P 64

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2018)04 - 0876 - 11

Analytical calculation of the critical inclination of rock slopes with a planar failure surface under water pressure

LI Wei¹, ZHAN Liangtong¹, WANG Kang²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310058, China; 2. College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan 610059, China)

Abstract: For the rock slope without a definite sliding surface, finding the position of the most dangerous sliding surface with planar failure and critical inclination is beneficial to accurately assess the stability of the slope and to the design of slope engineering. The mechanical model of rock slope with a planar failure considering the water pressure is established, and the unified analytical solution of the critical inclination is obtained by minimizing the value of a certain function. The reasonable form of water pressure distribution on the sliding surface is adopted and the detailed analytical solution of critical inclination is obtained considering the facts whether the front edge of the slope is blocked, whether a tension crack exists at the back edge of the slope, whether the sliding surface is filled with water, etc. The analysis results indicate that within a certain range, the critical inclination increases with the the height of the slope, the slope angle, the internal friction angle of the sliding surface, the unit weight and the height of the water table. The higher the cohesion of the sliding surface, the lower the critical inclination. The

收稿日期: 2017 - 11 - 06; **修回日期:** 2017 - 12 - 21

基金项目: 国家自然科学基金杰出青年科学基金项目(51625805); 国家自然科学基金资助项目(41641028)

Supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars(Grant No. 51625805) and National Natural Science Foundation of China(Grant No. 41641028)

作者简介: 李 伟(1994 -), 男, 2017 年毕业于成都理工大学地质工程专业, 现为博士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: liweiofficial@126.com。通讯作者: 詹良通(1972 -), 男, 现任教授、博士生导师。E-mail: zhanlt@zju.edu.cn

DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.1433

critical inclination is firstly increased and then decreased with the depth of the tension crack. There are differences in the critical inclination obtained with the different models of hydraulic pressure distribution. The drainage conditions of the slope have a significant influence on the critical inclination. A program calculating the critical inclination was written according to the established analytical solution.

Key words: slope engineering; rock slope; planar failure; critical inclination; analytical solutions; slope stability

1 引言

我国是一个滑坡地质灾害较为频发的国家, 近几十年以来, 几乎每年都有重大的滑坡灾害事故发生, 斜坡变形破坏过程和它所造成的不良地质环境对人类工程活动带来了十分严重的危害^[1-2]。斜坡岩土体稳定性分析一方面需要对稳定性做出评价和预测, 同时要为设计合理的人工边坡以及制定有效的整治措施提供依据。

根据边坡的物质组成, 可将边坡分为岩质边坡和土质边坡, 对于岩质边坡, 其内部发育的结构面控制着边坡的稳定性, 其破坏面多为平面^[3-4]。在对岩质边坡稳定性分析时, 若边坡内部无确定滑面或结构面情况不明, 则需估算最危险滑面的位置以及倾角, 并计算其最小稳定性系数, 定义最危险滑面的倾角为极限倾角, 用 α_{cr} 表示。

对于平面滑动岩质边坡极限倾角值, 可通过解析法求解。E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]最早给出了平面滑动岩质边坡极限倾角的估算公式, $\alpha_{cr} = (\beta + \varphi) / 2$, 其中, β 为边坡倾角, φ 为滑面内摩擦角, 该估算公式根据边坡稳定性系数等于 1, 由极限坡高推导得到, 仅考虑了重力作用, 滑面为单一滑面, 适用范围较小。随后, 蒋斌松等^[6]通过函数求极值的方法, 将边坡稳定性系数对滑面倾角微分, 得到了任意坡高条件下最简单边坡、折线与台阶形边坡、后缘具有拉张裂隙和水的边坡极限倾角解析解, 未考虑坡体前缘是否堵塞等情况, 未详细探讨边坡内部水力作用。缪世贤等^[7]综合重力和地震的影响, 通过边坡极限稳定性系数给出了仅存在单一滑面的极限倾角解析解。舒继森等^[8]经研究指出, 极限倾角不仅是滑面内摩擦角和边坡倾角的函数, 还应是边坡高度、滑面黏聚力和岩体重度的函数, 若边坡后缘存在拉张裂隙和水时, 极限倾角还与拉张裂隙深度和水位深度有关。上述极限倾角解析解, 均存在一定的局限性。此外, 也可采用最优化方法确定边坡的最危险滑面位置和极限稳定性系数^[9-10], 此种方法需假定滑动面位置, 通过试算法求解, 显然,

试算法具有一定的盲目性, 难以保证解为最优。对于无确定滑面的平面滑动岩质边坡, 其极限倾角求解应优先考虑解析法。

多数岩质边坡失稳都与地下水作用有关^[11-12]。在推导水力作用下平面滑动岩质边坡极限倾角解析解时, 滑面上的水力学模型十分复杂^[5, 13-16], 在模型简化时要做诸多假设。当平面滑动岩质边坡后缘存在拉张裂隙和水时, 其极限倾角解析解可采用蒋斌松和舒继森等提出的解析解。二者解析解的差别在于滑面上的水压分布形式不同, 蒋斌松等^[6]提出的解析解其滑面上水压分布形式采用 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]提出的传统水压分布假设; 而舒继森等^[15]发现前者提出的水压分布假设存在不适用的情况, 并提出了新的水压分布假设, 并以此得到新的极限倾角解析解。事实上, 在一定条件下, 以上 2 种水压分布假设均存在不适用问题, 李 伟等^[16]进行了详细的说明, 同时提出了一种更为合理的水压分布假设。

在边坡工程设计中, 边坡的实际情况非常复杂, 存在如边坡后缘是否存在拉张裂隙, 拉张裂隙中是否充水, 滑面上是否充水, 边坡前缘是否堵塞等情况, 因此, 平面滑动岩质边坡极限倾角受多种因素控制。若能依据合理的水压分布假设, 建立一个统一的极限倾角解析解, 对于边坡后缘是否存在拉张裂隙, 滑面上是否充水, 拉张裂隙中是否充水, 坡体前缘是否堵塞等复杂情况均适用, 则大为提高了解析解的适用性和准确性, 对此类边坡的稳定性分析具有重要的理论指导意义, 增加了工程实际应用价值。为此, 本文拟重点对此问题进行探讨。

2 极限倾角解析计算

2.1 平面滑动岩质边坡力学模型

平面滑动岩质边坡力学模型如图 1 所示, U 为垂直于滑面的扬压力, V 为垂直于后缘拉张裂隙壁的静水压力, L 为最危险滑面的长度, Z 为拉张裂隙的深度, H 为边坡总体高度, W 为边坡块体重力, α 为滑面倾角, β 为边坡坡角。根据刚体极限平衡

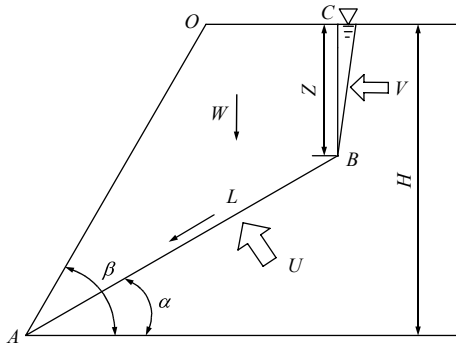


图1 平面滑动岩质边坡力学模型

Fig.1 The model of rock slope with planar failure surface

分析法^[17], 得到平面滑动岩质边坡的稳定性系数表达式为

$$F_s = \frac{(W \cos \alpha - U - V \sin \alpha) \tan \varphi + cL}{W \sin \alpha + V \cos \alpha} \quad (1)$$

式中: c 为滑面黏聚力, φ 为滑面内摩擦角。

据边坡几何关系: $L = (H - Z) / \sin \alpha$ 。式(1)化为

$$F_s = \frac{(W \cos \alpha - U - V \sin \alpha) \tan \varphi + \frac{c(H - Z)}{\sin \alpha}}{W \sin \alpha + V \cos \alpha} \quad (2)$$

2.2 极限倾角公式推导

极限倾角对应的滑面稳定性系数最小。对式(2)两边同时求对 α 的一阶偏导数, W 和 U 也是 α 的函数, 得

$$\frac{\partial F_s}{\partial \alpha} = \frac{1}{(W \sin \alpha + V \cos \alpha)^2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \cos \alpha - W \sin \alpha - \frac{\partial U}{\partial \alpha} - V \cos \alpha \right) \tan \varphi - \frac{c(H - Z) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] (W \sin \alpha + V \cos \alpha) - \left[(W \cos \alpha - U - V \sin \alpha) \tan \varphi + \frac{c(H - Z)}{\sin \alpha} \right] \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \sin \alpha + W \cos \alpha - V \sin \alpha \right) \right\} \quad (3)$$

令 $\frac{\partial F_s}{\partial \alpha} = 0$, 得

$$\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \cos \alpha - W \sin \alpha - \frac{\partial U}{\partial \alpha} - V \cos \alpha \right) \tan \varphi - \frac{c(H - Z) \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] (W \sin \alpha + V \cos \alpha) - \left[(W \cos \alpha - U - V \sin \alpha) \tan \varphi + \frac{c(H - Z)}{\sin \alpha} \right] \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} \sin \alpha + W \cos \alpha - V \sin \alpha \right) = 0 \quad (4)$$

整理得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} W \sin \alpha + \frac{\partial U}{\partial \alpha} V \cos \alpha - \frac{\partial W}{\partial \alpha} V - \frac{\partial W}{\partial \alpha} U \sin \alpha + W^2 + V^2 + VU \sin \alpha - WU \cos \alpha \right) \tan \varphi + \left(\frac{2W \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{V \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\partial W}{\partial \alpha} - V \right) [c(H - Z)] = 0 \quad (5)$$

式(5)为平面滑动岩质边坡最危险滑面的倾角的统一求解公式, 式中只有 α 是未知条件, 根据岩质边坡的实际情况, 代入参数求解, 得极限倾角 α_{cr} 。再将 α_{cr} 代入式(2), 得到边坡的极限稳定性系数。

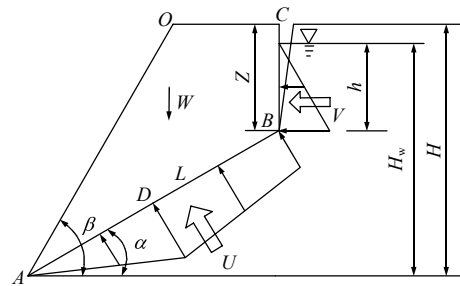
在实际边坡工程中, 边坡的情况非常复杂。可依据边坡前缘水流排泄情况, 将平面滑动岩质边坡分为未堵塞和堵塞 2 种情况, 再根据极限倾角统一解析解(式(5)), 分别讨论后缘是否存在拉张裂隙, 滑面上是否充水等情况下的极限倾角详细解析解。

2.3 边坡前缘未堵塞极限倾角解析

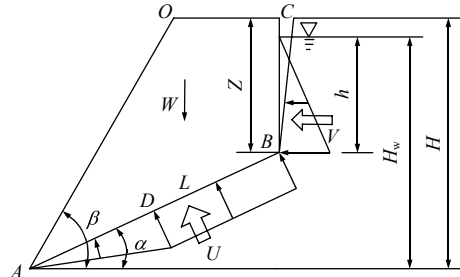
当岩质边坡前缘未堵塞时, 滑面是否充水, 边坡后缘是否存在拉张裂隙, 拉张裂隙深度, 以及拉张裂隙中充水高度等因素与极限倾角紧密联系。

2.3.1 存在拉张裂隙、滑面充水边坡极限倾角解析

当边坡前缘未堵塞、后缘存在拉张裂隙且滑面充水, 其力学模型及滑面上水压分布形式如图 2^[16]所示。图 2 中, 点 D 为 $(H_w - h) / 2$ 高程点, h 为拉张裂隙中的水位高度, H_w 为边坡中水位总高度, B 点静水压力为 $h\gamma_w$, 点 D 静水压力为 $H_w\gamma_w / 2$, 点 A 静水压力为 0。当 $h < L \sin \alpha$ 时, 滑面上静水压力



(a) $h < L \sin \alpha$



(b) $h = L \sin \alpha$

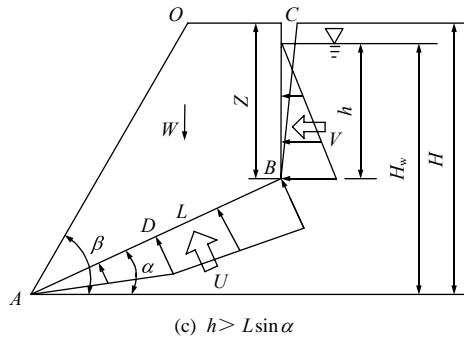


图 2 岩质边坡力学模型—^[16]
Fig.2 The model 1 of rock slope^[16]

在点 D 达到最大值；当 $h = L \sin \alpha$ 时，滑面上静水压力值在 BD 段处处相等；当 $h > L \sin \alpha$ 时，滑面上静水压力在点 B 达到最大值。由图 2 可得

$$\left. \begin{aligned} Z &\neq 0 \\ V &= \frac{1}{2} h^2 \gamma_w \\ U &= \frac{(H_w^2 - h^2) \gamma_w}{4 \sin \alpha} \\ W &= \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \frac{\gamma_G}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据式(6)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= -\frac{(H_w^2 - h^2) \gamma_w \cos \alpha}{4 \sin^2 \alpha} \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= -\frac{(H^2 - Z^2) \gamma_G}{2 \sin^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式(6)、(7)代入式(5)，整理得

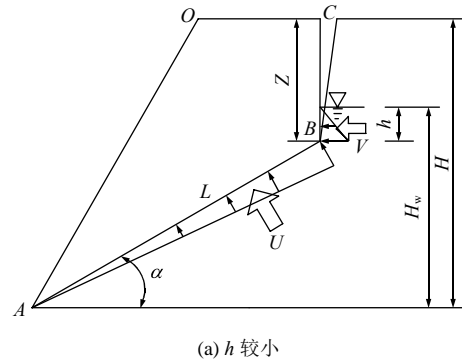
$$\left[\frac{\gamma_G^2}{4} \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right)^2 - \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{(H_w^2 - h^2) \gamma_G \gamma_w}{4 \tan \alpha} - \frac{(H_w^2 - h^2) h^2 \gamma_w^2}{8 \tan^2 \alpha} + \frac{(H^2 - Z^2)(H_w^2 + h^2) \gamma_G \gamma_w}{8 \sin^2 \alpha} + \frac{(H_w^2 - h^2) h^2 \gamma_w^2}{8} + \frac{1}{4} h^4 \gamma_w^2 \right] \tan \varphi + \left[\left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \frac{\gamma_G}{\tan \alpha} + \frac{h^2 \gamma_w}{2 \tan^2 \alpha} - \frac{(H^2 - Z^2) \gamma_G}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} h^2 \gamma_w \right] [c(H - Z)] = 0 \quad (8)$$

$$\left[\frac{\gamma_G^2}{4} \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right)^2 \tan \varphi + \left[\left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \frac{\gamma_G}{\tan \alpha} - \frac{(H^2 - Z^2) \gamma_G}{2 \sin^2 \alpha} \right] [c(H - Z)] = 0 \quad (9)$$

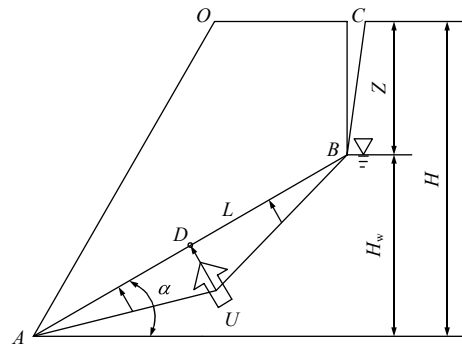
式(8)为平面滑动岩质边坡前缘未堵塞、后缘存在拉张裂隙且滑面充水时的极限倾角 α_{cr} 的求解表达式。显然，极限倾角 α_{cr} 与边坡高度 H、拉张裂隙深度 Z、边坡坡角 β 、滑面黏聚力 c、滑面内摩擦角 φ 、边坡岩体重度 γ_G 、边坡中充水总高度 H_w 、拉张裂隙中充水高度 h 有关，即： $\alpha_{cr} = f(H, H_w, h, Z, \beta, c, \varphi, \gamma_G)$ ，因式(8)为复杂的三角函数，很难用显式表达 α_{cr} ，对于实际工程情况，可使用计算机编写求解程序，再代入参数值 H、 H_w 、h、Z、 β 、c、 φ 、 γ_G 求解即可。

当边坡后缘存在拉张裂隙时，若不考虑边坡内部水对极限倾角的影响，即 $H_w = 0, h = 0$ ，代入式(8)，得到此种情况下极限倾角解析解(式(9))。将 $H_w = 0, h = 0$ 代入蒋斌松等^[6, 8]中的具有拉张裂隙的边坡，化简得到的极限倾角解析解与式(9)一致。

当考虑边坡内部水对极限倾角的影响时，坡体内部中水压分布模式至关重要。蒋斌松等^[6]得到的极限倾角解析解，坡体内部水压分布模式采用 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]提出的水压分布假设。根据 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]，当拉张裂隙中充水高度较小时，其水压分布模式如图 3(a)所示，点 B 的静水压力为 $h \gamma_w$ ，点 A 的静水压力为 0，点 B 到点 A 的静



(a) h 较小



(b) h = 0

图 3 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]中不同情况下水压分布形式
Fig.3 Water pressure distribution under different conditions by E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]

水压力线性减小，滑面上水压计算公式为 $U = h(H_w - h)\gamma_w / (2\sin\alpha)$ ；当拉张裂隙中充水高度为零时，其水压分布模式如图 3(b)所示，点 D 为 $H_w / 2$ 高程点，点 B 的静水压力为 0，点 D 的静水压力为 $H_w\gamma_w / 2$ ，点 A 的静水压力为 0，滑面上水压计算公式为 $U = H_w^2\gamma_w / (4\sin\alpha)$ 。显然，当拉张裂隙中充水高度较小时，图 3(a)中的 U 反而小于图 3(b)中的 U ，但图 3(a)中的水位高度明显高于图 3(b)中的水位高度，这与实际情况下拉张裂隙中水位越高滑面上水压越大这一实际情况相矛盾。因此，当拉张裂隙中充水高度较小时，E. Hoek 和 J. W. Bray^[15]提出的水压分布模式不适用，故在推导此类岩质边坡极限倾角解析解时需要寻求更合理的水压分布模式。

舒继森等^[8, 15]提出了新的水压分布模式，并建立了此类岩质边坡的极限倾角解析解，根据舒继森等^[15]的研究，当拉张裂隙中充水高度大于坡体内部总水位高度的 1/2 时，其水压分布模式如图 4 所示。点 D 为 $H_w / 2$ 高程点，点 D 的静水压力为 $H_w\gamma_w / 2$ ，点 B 的静水压力为 $(H_w - h)\gamma_w$ ，点 A 的静水压力为 0，滑面上水压计算公式为 $U = (H_w - h)^2\gamma_w / (2\sin\alpha)$ 。据水力学理论^[18]可知，当拉张裂隙中水位一定时，拉张裂隙壁上的静水压力应与水头高度呈线性关系。显然，图 4 中拉张裂隙壁上的静水压力分布理论依据不足，此假设下拉张裂隙壁上的水压力值偏小。因此，当拉张裂隙中充水高度较大时，舒继森等^[15]提出的水压分布模式不适用。

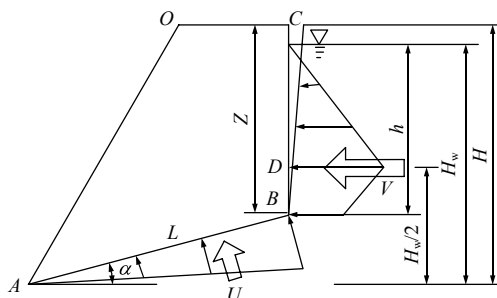


图 4 舒继森等^[15]水压分布形式
Fig.4 Water pressure distribution by SHU Jisen et al^[15]

基于此，李伟等^[16]提出了一种更为合理的水压模式。在图 2 中，若岩质边坡后缘存在拉张裂隙，地下水可在点 A 自由渗出，当滑面中充满水，点 A 的排泄量等于点 B 的补给量，拉张裂隙中水位高度为 0，此时滑面上的静水压力分布形式与 E. Hoek 和 J. W. Bray^[15]所作图 3(b)水压分布假设一致，定义此部分静水压力为初始静水压力。当点 B 的补给量

大于点 A 的排泄量，拉张裂隙中逐渐充水，点 B 的静水压力不断增大，点 B 的相邻点的静水压力也会随着点 B 的静水压力增加而增加，而使此点在初始静水压力的基础上增加一定值，相邻点的下一点的静水压力也会相应增加，每一个点增加的静水压力值不等但成一定线性关系，此种传递效应依次递推至点 A 。结构面上的静水压力分布应该是初始静水压力和传递效应共同作用的结果。滑面上初始静水压力分布如图 5(a)所示，可用函数 P_1 表示；仅考虑传递效应的水压增量分布如图 5(b)所示，可用函数 P_2 表示：

$$P_1 = \begin{cases} \sin(\alpha\gamma_w x) & \left(0 \leq x < \frac{L}{2}\right) \\ -\sin(\alpha\gamma_w x) + L\sin(\alpha\gamma_w) & \left(\frac{L}{2} \leq x \leq L\right) \end{cases} \quad (10a)$$

$$P_2 = \frac{h}{L}\gamma_w x \quad (0 \leq x \leq L) \quad (10b)$$

$$P = P_1 + P_2 \quad (10c)$$

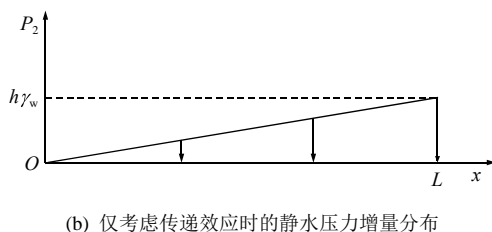
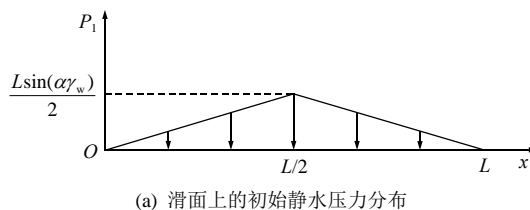


图 5 滑面上的静水压力分布函数^[16]

Fig.5 Hydrostatic pressure distribution functions along the failure plane^[16]

由式(10)可得

$$P = \begin{cases} \frac{(h + L\sin\alpha)}{L}\gamma_w x & \left(0 \leq x < \frac{L}{2}\right) \\ \frac{(h - L\sin\alpha)}{L}\gamma_w x + L\sin\alpha\gamma_w & \left(\frac{L}{2} \leq x \leq L\right) \end{cases} \quad (11)$$

当 $x=0$ 时，即点 A ， $P=0$ ；在 $x=L/2$ 时，即点 D ， $P=(L\sin\alpha + h)\gamma_w / 2$ ；当 $x=L$ 时，即点 B ， $P=h\gamma_w$ 。滑面上的静水压力为

$$U = \frac{L}{4}\left(\frac{h + L\sin\alpha}{2} + h\right)\gamma_w + \frac{L}{4}\left(\frac{h + L\sin\alpha}{2}\right)\gamma_w \quad (12)$$

且

$$L = (H_w - h) / \sin \alpha \quad (13)$$

化简得

$$U = \frac{(H_w^2 - h^2)\gamma_w}{4 \sin \alpha} \quad (14)$$

无论岩质边坡中有无拉张裂隙，拉张裂隙中充水高度较大还是较小，滑面上水压均可用式(14)计算，具体水压分布模式如图 2 所示，李 伟等^[16]还讨论了多种极端情况下式(14)的适用性，本文不再赘述。因此，在进行此类平面滑动岩质边坡极限倾角解析推导时，滑面上水压计算采用式(14)。

2.3.2 无拉张裂隙、滑面充水边坡极限倾角解析

当边坡前缘未堵塞、后缘无拉张裂隙且滑面充水时，据李 伟等^[16]，其边坡力学模型如图 6 所示，坡体内部水压分布形式与 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5]中水压分布形式一致，点 D 为 $H_w/2$ 高程点，点 A 和 B 静水压力为 0，点 D 静水压力为 $H_w\gamma_w/2$ 。据图 6 可知：

$$\left. \begin{matrix} Z = 0 \\ h = 0 \\ H_w \neq 0 \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

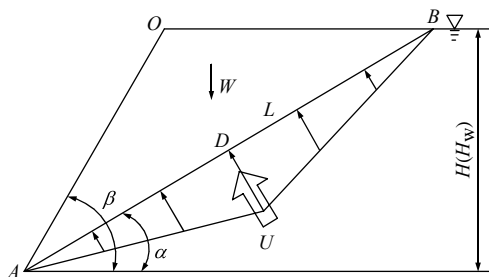


图 6 岩质边坡力学模型二
Fig.6 The model 2 of rock slope

将式(15)代入式(8)可得

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right)^2 H^2 \gamma_G - \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right) \frac{H_w^2 \gamma_w}{4 \tan \alpha} + \frac{H_w^2 \gamma_w}{8 \sin^2 \alpha} \right] \tan \varphi + \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right) \frac{cH}{\tan \alpha} - \frac{cH}{2 \sin^2 \alpha} = 0 \quad (16)$$

式(16)为平面滑动岩质边坡前缘未堵塞、后缘无拉张裂隙且滑面充水时的极限倾角 α_{cr} 的求解表达式。

2.3.3 无拉张裂隙、滑面不充水边坡极限倾角解析

当边坡前缘未堵塞、后缘无拉张裂隙且滑面不充水时，其边坡力学模式如图 7 所示，即

$$\left. \begin{matrix} Z = 0 \\ h = 0 \\ H_w = 0 \end{matrix} \right\} \quad (17)$$

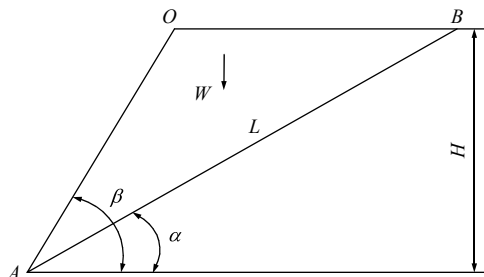


图 7 岩质边坡力学模型三
Fig.7 The model 3 of rock slope

将式(17)代入式(8)可得

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right)^2 H \gamma_G \tan \varphi + \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right) \frac{c}{\tan \alpha} - \frac{c}{2 \sin^2 \alpha} = 0 \quad (18)$$

式(18)为平面滑动岩质边坡前缘未堵塞、后缘无拉张裂隙且滑面不充水时的极限倾角 α_{cr} 的求解表达式，与蒋斌松等^[6]中最简单边坡对应得到的极限倾角解析解一致。

2.4 边坡前缘堵塞极限倾角解析

已有研究在推导平面滑动岩质边坡极限倾角解析解时，未探讨坡体前缘堵塞时的极限倾角解析解。事实上，在坡体前缘常因局部崩塌或局部滑坡，堵塞了边坡前缘渗流出口，此时，坡体内部的水压分布模式发生改变，其最危险滑面位置也将随之发生变化。因此，有必要探讨坡体前缘堵塞时的极限倾角解析解。

当平面滑动岩质边坡前缘堵塞时，极限倾角与边坡后缘是否存在拉张裂隙，拉张裂隙深度与拉张裂隙中充水高度等因素有关。

2.4.1 存在拉张裂隙、滑面充水边坡极限倾角解析

当边坡前缘堵塞、后缘存在拉张裂隙且滑面充水时，其边坡力学模型如图 8 所示。据水力学理论^[18]可知，点 B 水压为 $h\gamma_w$ ，点 A 水压为 $H_w\gamma_w$ ，由图 8 可得

$$\left. \begin{matrix} Z \neq 0 \\ V = \frac{1}{2} h^2 \gamma_w \\ U = \frac{(H_w^2 - h^2)\gamma_w}{2 \sin \alpha} \\ W = \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \frac{\gamma_G}{2} \end{matrix} \right\} \quad (19)$$

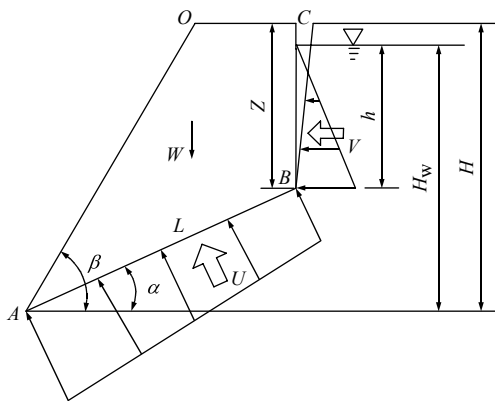


图8 岩质边坡力学模型四
Fig.8 The model 4 of rock slope

根据式(19)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= -\frac{(H_w^2 - h^2)\gamma_w \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha} &= -\frac{(H^2 - Z^2)\gamma_G}{2 \sin^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

将式(19), (20)代入式(5), 整理得

$$\left[\frac{\gamma_G^2 \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right)^2}{4} - \left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{(H_w^2 - h^2)\gamma_G \gamma_w}{2 \tan \alpha} - \frac{(H_w^2 - h^2)h^2 \gamma_w^2}{4 \tan^2 \alpha} + \frac{(H^2 - Z^2)H_w^2 \gamma_G \gamma_w}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{(H_w^2 - h^2)h^2 \gamma_w^2}{4} + \frac{1}{4} h^4 \gamma_w^2 \right] \tan \phi + \left[\left(\frac{H^2 - Z^2}{\tan \alpha} - \frac{H^2}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{\gamma_G}{\tan \alpha} + \frac{h^2 \gamma_w}{2 \tan^2 \alpha} - \frac{(H^2 - Z^2)\gamma_G}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} h^2 \gamma_w \right] [c(H - Z)] = 0 \quad (21)$$

式(21)为平面滑动岩质边坡前缘堵塞、存在拉张裂隙且滑面充水时, 极限倾角 α_{cr} 的求解表达式。 $\alpha_{cr} = f(H, H_w, h, Z, \beta, c, \phi, \gamma_G)$, 同理, 式(21)为复杂三角函数, 对于实际情况下可使用计算机编程求解。

2.4.2 无拉张裂隙、滑面充水边坡极限倾角解析

当边坡前缘堵塞、后缘无拉张裂隙且滑面充水时, 其边坡力学模式如图9所示, 即

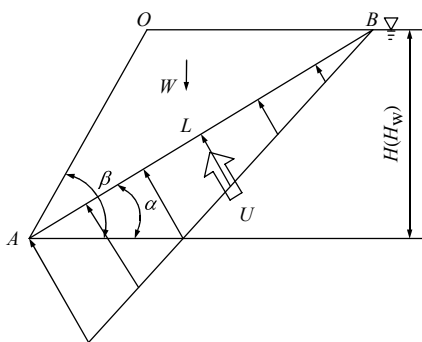


图9 岩质边坡力学模型五
Fig.9 The model 5 of rock slope

$$\left. \begin{aligned} Z &= 0 \\ h &= 0 \\ H_w &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)可得

$$\left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right)^2 H^2 \gamma_G - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right) \frac{H_w^2 \gamma_w}{\tan \alpha} + \frac{H_w^2 \gamma_w}{4 \sin^2 \alpha} \right] \tan \phi + \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right) \frac{cH}{\tan \alpha} - \frac{cH}{2 \sin^2 \alpha} = 0 \quad (23)$$

式(23)为平面滑动岩质边坡前缘堵塞、无拉张裂隙且滑面充水时极限倾角 α_{cr} 的求解表达式。

3 极限倾角的影响因素分析

平面滑动岩质边坡极限倾角 α_{cr} 与边坡高度 H , 拉张裂隙深度 Z , 边坡坡角 β , 滑面黏聚力 c , 滑面内摩擦角 ϕ , 边坡岩体重度 γ_G , 边坡中充水总高度 H_w , 拉张裂隙中充水高度 h 有关。其中, H, Z, β 为边坡的几何参数; c, ϕ, γ_G 为边坡的材料参数; H_w, h 为外部影响因素。为了说明 α_{cr} 与 $H, Z, \beta, c, \phi, \gamma_G, H_w, h$ 的关系, 采用控制变量法, 以边坡前缘未堵塞时建立的解析解进行分析。

3.1 边坡几何参数对极限倾角的影响分析

在分析边坡的几何参数 H, Z, β 与极限倾角的关系时, 因地下水位高度会随边坡的几何参数发生改变而改变, 暂不考虑地下水对极限倾角的影响。

当探求 α_{cr} 与 H 的关系时, 边坡的计算参数为: $\beta = 70^\circ, Z = 10 \text{ m}, c = 100 \text{ kPa}, \phi = 25^\circ, \gamma_G = 25 \text{ kN/m}^3, H_w = 0 \text{ m}, h = 0 \text{ m}, \gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3, H$ 由 20~80 m 变化, 步长为 10 m。 α_{cr} 与 H 的关系如图 10 所示, α_{cr} 随 H 增大而逐渐增大。

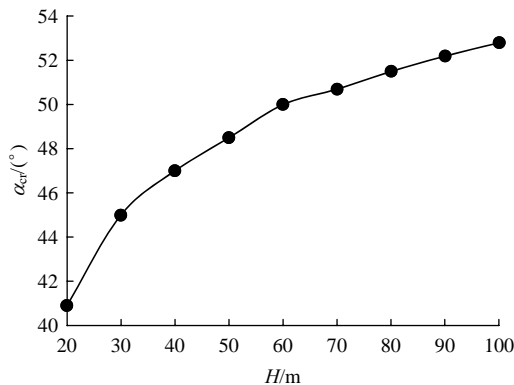


图10 α_{cr} 与 H 的关系
Fig.10 Relationship between α_{cr} and H

当探求 α_{cr} 与 Z 的关系时，边坡的计算参数为： $H = 20\text{ m}$ ， Z 由 $0 \sim 14\text{ m}$ 变化，步长为 2 m ，其余参数与图 10 计算参数一致。 α_{cr} 与 Z 的关系如图 11 所示，在一定范围内， α_{cr} 随 Z 先增大再逐渐减小。

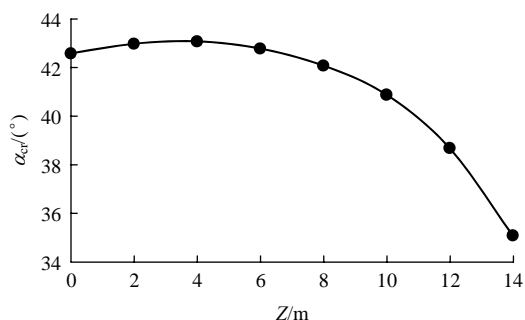


图 11 α_{cr} 与 Z 的关系

Fig.11 Relationship between α_{cr} and Z

当探求 α_{cr} 与 β 的关系时，边坡的计算参数为： $H = 20\text{ m}$ ， β 由 $40^\circ \sim 80^\circ$ 变化，步长为 5° ，其余参数与图 10 计算参数一致。 α_{cr} 与 β 的关系如图 12 所示， α_{cr} 随 β 增大而逐渐增大。

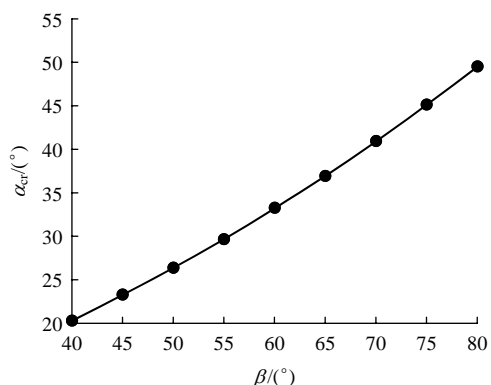


图 12 α_{cr} 与 β 的关系

Fig.12 Relationship between α_{cr} and β

通过以上分析可知，在一定范围内，平面滑动岩质边坡极限倾角 α_{cr} 随边坡高度 H 、边坡坡角 β 增大而增大，一定程度上，极限倾角 α_{cr} 随拉张裂隙深度 Z 增大而先增大再减小。

3.2 边坡材料参数对极限倾角的影响分析

在分析边坡的材料参数 c ， φ ， γ_G 与极限倾角的关系时，可考虑地下水对极限倾角的影响，当地下水位高度一定时，选用不同的水压分布模型， α_{crl} 为采用图 2 所示水压分布模型得到的极限倾角， α_{crh} 为采用 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5] 中的水压分布模型得到的极限倾角， α_{crs} 为采用舒继森等^[15] 中的水压分布模型得到的极限倾角。

当探求 α_{cr} 与 c 的关系时，边坡的计算参数为：

$H = 20\text{ m}$ ， $H_w = 15\text{ m}$ ， $h = 5\text{ m}$ ， c 由 $50 \sim 100\text{ kPa}$ 变化，步长为 5 kPa ，其余参数与图 10 计算参数一致。 α_{cr} 与 c 的关系如图 13 所示，极限倾角均随 c 增大而逐渐减小，但不同的水压分布模型得到的极限倾角存在差异，总体规律为 $\alpha_{crl} > \alpha_{crs} > \alpha_{crh}$ 。

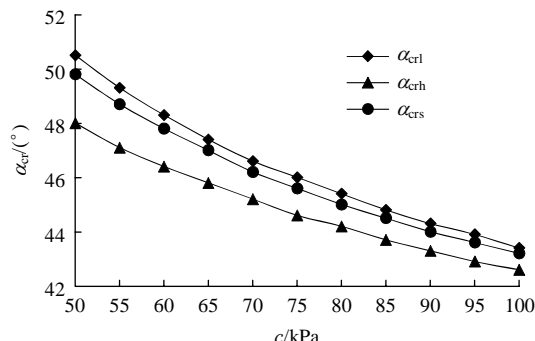


图 13 α_{cr} 与 c 的关系

Fig.13 Relationship between α_{cr} and c

当探求 α_{cr} 与 φ 的关系时，边坡的计算参数为： $H = 20\text{ m}$ ， $H_w = 15\text{ m}$ ， $h = 5\text{ m}$ ， φ 由 $20^\circ \sim 40^\circ$ 变化，步长为 2° ，其余参数与图 10 计算参数一致。 α_{cr} 与 φ 的关系如图 14 所示，极限倾角均随 φ 增大而逐渐增大，不同的水压分布模型得到的极限倾角存在差异，总体规律为 $\alpha_{crl} > \alpha_{crs} > \alpha_{crh}$ 。

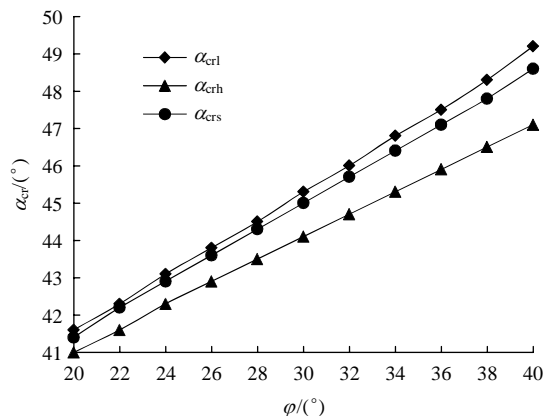


图 14 α_{cr} 与 φ 的关系

Fig.14 Relationship between α_{cr} and φ

当探求 α_{cr} 与 γ_G 的关系时，边坡的计算参数为： $H = 20\text{ m}$ ， $H_w = 15\text{ m}$ ， $h = 5\text{ m}$ ， γ_G 由 $18 \sim 26\text{ kN/m}^3$ 变化，步长为 1 kN/m^3 ，其余参数与图 10 计算参数一致。 α_{cr} 与 γ_G 的关系如图 15 所示，极限倾角均随 γ_G 增大而逐渐增大，不同的水压分布模型得到的极限倾角存在差异，总体规律为 $\alpha_{crl} > \alpha_{crs} > \alpha_{crh}$ 。

通过以上分析可知，在一定范围内，平面滑动岩质边坡极限倾角 α_{cr} 随滑面内摩擦角 φ 、边坡岩体重度 γ_G 增大而增大；随滑面黏聚力 c 增大而减小；

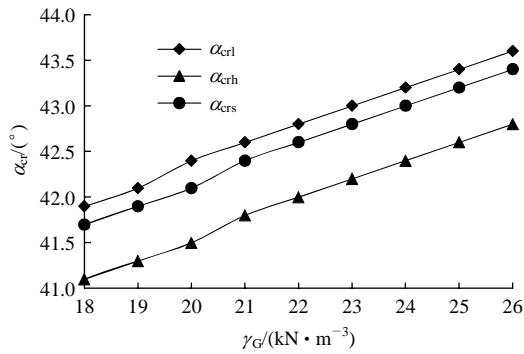


图 15 α_{cr} 与 γ_G 的关系

Fig.15 Relationship between α_{cr} and γ_G

同时，不同的水压分布模型得到的极限倾角存在差异，总体规律为 $\alpha_{crl} > \alpha_{crs} > \alpha_{crh}$ 。

3.3 地下水对极限倾角的影响分析

在分析外部影响因素 H_w ， h 与极限倾角的关系时，可对比采用不同水压分布模型计算极限倾角的差异。因 $H_w \leq H - Z$ ， $h = 0$ ； $H_w \geq H - Z$ ， $h = H_w + Z - H$ ， h 随 H_w 改变而改变，因此，得到 α_{cr} 与 H_w 的关系，即可反映 α_{cr} 与 h 的关系。当探求 α_{cr} 与 H_w 的关系时，边坡的计算参数为： $H = 20 \text{ m}$ ， H_w 由 $10 \sim 20 \text{ m}$ 变化，步长为 1 m ， h 随 H_w 改变而改变，其余参数与图 10 计算参数一致。当 H_w 小于 10 m 时， $h = 0$ ，3 种水压分布模型一致，得到的极限倾角一致，此处不予讨论。3 种水压分布模型下极限倾角的计算结果见图 16。

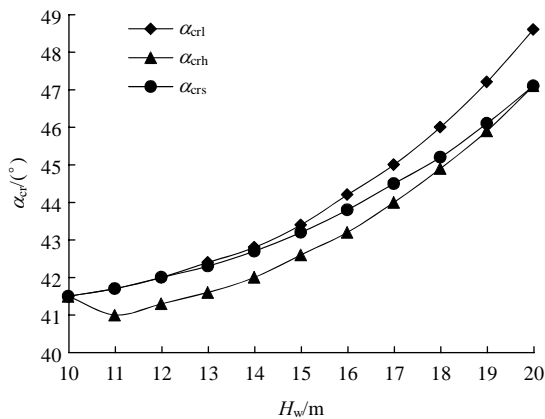


图 16 α_{cr} 与 H_w 的关系

Fig.16 Relationship between α_{cr} and H_w

由图 16 可知，总体上，极限倾角随 H_w 增大而逐渐增大，不同的水压分布模型得到的极限倾角存在差异，且 h 与 α_{cr} 的关系同 H_w 与 α_{cr} 的关系一致。当 H_w 为 10 m 时，3 种水压分布形式一致，因此得到的极限倾角一致；当拉张裂隙中充水高度较小时， α_{crl} 与 α_{crs} 较接近， α_{crh} 先减小再增大，由前述分析可知，此时 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5] 水压分布模型得

到的滑面上水压力值偏小，得到的极限倾角误差较大，此时图 2 和舒继森等^[15]的水压分布形式较接近，得到的极限倾角值误差较小。因此，当拉张裂隙中充水高度较小时，不宜选用 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5] 的水压分布模型进行极限倾角计算；随着拉张裂隙中水位高度不断增大， α_{crh} 与 α_{crs} 较接近，因此时二者水压分布形式越来越接近，特别地，当坡体中总水位高度为 20 m 时，即拉张裂隙中水位高度为 10 m 时，二者水压分布形式相同，得到的极限倾角值相同；若拉张裂隙中水位继续增大，按舒继森等^[15]的水压分布假设，拉张裂隙壁上水压分布形式不符合传统水力学理论^[18]，其水压值偏小，得到的极限倾角误差较大，此时图 2 和 E. Hoek 和 J. W. Bray^[5] 的水压分布形式较接近，得到的极限倾角误差较小。因此，当拉张裂隙中充水高度较大时，不宜选用舒继森等^[15]的水压分布模型进行极限倾角计算。综上所述，无论拉张裂隙中是否充水，充水高度较大还是较小，选用图 2 的水压分布模型计算极限倾角最为合理。

通过以上分析可知，在一定范围内，平面滑动岩质边坡极限倾角 α_{cr} 随边坡水位总水位高度 H_w 增大而增大，因 H_w 与 h 有相同的变化规律，即 α_{cr} 随 h 增大而增大；且不同水压分布模型得到的极限倾角存在差异。

再者，在地下水的长期作用下，边坡前缘可能发生局部滑坡或崩塌，堵塞边坡内部地下水的渗流出口，极大降低边坡的稳定性，其极限倾角值也会发生显著变化。为了说明边坡前缘堵塞和未堵塞时得到的极限倾角的差别，本文选取拉张裂隙中水位高度作为变量，在探求 α_{cr} 与 h 的关系时，使用堵塞和不堵塞两种模式求解。边坡的计算参数为： $H = 20 \text{ m}$ ， h 由 $0 \sim 10 \text{ m}$ 变化，步长为 1 m ， H_w 随 h 改变而改变，其余参数与图 10 计算参数一致。图 17 为 α_{cr} 的计算结果，显然，边坡前缘堵塞显著低于边

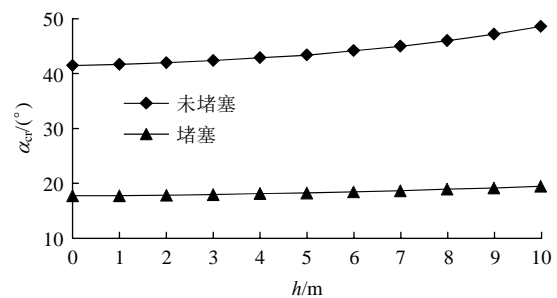


图 17 不同的排水条件下 α_{cr} 与 h 的关系

Fig.17 Relationship between α_{cr} and h under the different drainage conditions

坡前缘未堵塞时得到的极限倾角值, α_{cr} 均随 h 增大而逐渐增大。因此, 在对此类边坡进行稳定性评价时, 弄清边坡内部地下水在边坡前缘的排泄情况至关重要。

4 编写求解程序

式(5)是平面滑动岩质边坡极限倾角的统一求解公式。根据边坡的实际情况, 边坡后缘是否存在拉张裂隙, 拉张裂隙中是否充水, 滑面上是否充水, 边坡前缘是否堵塞等情况下的极限倾角均可用式(8), (21)求解。式(8), (21)均为复杂的三角函数, 可采用二分法编写求解程序。图 18 为编写的计算程序的一个界面, 先根据边坡前缘是否堵塞选择计算模式, 再输入 $H, H_w, h, Z, \beta, c, \varphi, \gamma_G$, 就可直接得出临界滑面倾角数值解。根据几何关系, 求出的解应满足以下条件:

$$\tan \alpha_{cr} \leq \frac{H-Z}{H} \tan \beta \quad (24)$$

若求出的解不在此范围内, 则程序显示“该解无效”, 则表明此种条件下, 不满足岩质边坡的几何条件。

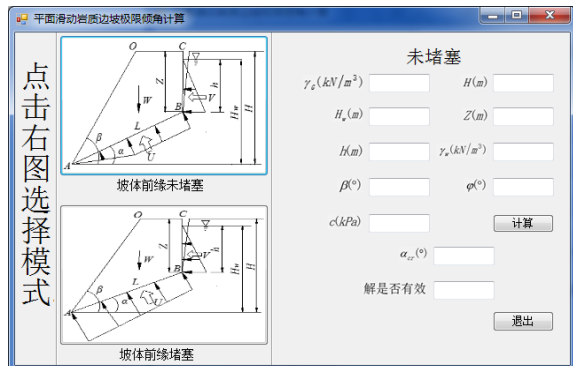


图 18 极限倾角求解程序界面

Fig.18 The program of calculating the critical inclination of rock slope

5 结 论

通过对水力作用下平面滑动岩质边坡极限倾角解析解的详细探讨, 得到的结论如下:

(1) 考虑水力作用, 建立了平面滑动岩质边坡力学模型, 得到了岩质边坡极限倾角的统一解析解(式(5))。

(2) 采用岩质边坡中更为合理的水压分布假设, 根据边坡前缘是否堵塞, 后缘是否存在拉张裂

隙, 滑面上是否充水等实际情况, 得到了平面滑动岩质边坡极限倾角的详细解析解(式(8), (21))。

(3) 新得到的平面滑动岩质边坡极限倾角解析解适用范围更广。无论边坡前缘是否堵塞, 后缘是否存在拉张裂隙, 滑面上是否充水, 拉张裂隙中充水高度较大还是较小, 均可利用式(8), (21)求解。

(4) 平面滑动岩质边坡极限倾角受多种因素控制。在一定范围内, 极限倾角随边坡高度、边坡坡角、滑面内摩擦角、岩体重度、水位高度增大而增大; 随滑面黏聚力增大而减小; 随拉张裂隙深度增大先增大再减小, 且不同水压分布模型得到的极限倾角存在差异。同时, 边坡前缘排水条件对此类边坡极限倾角值影响显著。

参考文献(References):

- [1] 黄润秋. 20 世纪以来中国的大型滑坡及其发生机制[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(3): 433 - 454.(HUANG Runqiu. Large-scale landslides and their sliding mechanisms in China since the 20th century[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(3): 433 - 454.(in Chinese))
- [2] 黄润秋, 许 强. 中国典型灾难性滑坡[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 1 - 20.(HUANG Runqiu, XU Qiang. Catastrophic landslides in China[M]. Beijing: Science Press, 2008: 1 - 20.(in Chinese))
- [3] 范宣梅, 许 强, 张倬元, 等. 平推式滑坡成因机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(增 2): 3 753 - 3 759.(FAN Xuanmei, XU Qiang, ZHANG Zhuoyuan, et al. Study of genetic mechanism of translational landslide[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(Supp.2): 3 753 - 3 759.(in Chinese))
- [4] 许 强, 范宣梅, 李 园, 等. 板梁状滑坡形成条件成因机制与防治措施[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(2): 242 - 251.(XU Qiang, FAN Xuanmei, LI Yuan, et al. The formation conditions, formation mechanism and control measures of plate girder shape landslide[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(2): 242 - 251.(in Chinese))
- [5] HOEK E, BRAY J W. Rock slope engineering[M]. London: Revised Second Edition, 1977: 12 - 14.
- [6] 蒋斌松, 蔡美峰, 都 浩. 平面滑动边坡稳定性的解析计算[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(1): 91 - 94.(JIANG Binsong, CAI Meifeng, DU Hao. Analytical calculation on stability of slope with planar failure surface[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(1): 91 - 94.(in Chinese))
- [7] 缪世贤, 陈征宙, 张明瑞, 等. 平面滑动型边坡极限倾角的研究[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(1): 94 - 97.(MIAO Shixian, CHEN Zhengzhou, ZHANG Mingrui, et al. Study and analysis of critical

- inclination slope with planar failure surface[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(1): 94 - 97.(in Chinese)
- [8] 舒继森, 才庆祥, 王成龙, 等. 岩石边坡平面滑动时的临界滑面倾角的探讨[J]. 中国矿业大学学报, 2006, 35(4): 437 - 440.(SHU Jisen, CAI Qingxiang, WANG Chenglong, et al. Inquire into critical inclination of failure face in rock slope with planar failure[J]. Journal of China University of Mining and Technology, 2006, 35(4): 437 - 440.(in Chinese))
- [9] NGUYEN V U. Determination of critical slope failure surface[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(2): 238 - 250.
- [10] 陈祖煜, 邵长明. 最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(4): 1 - 13.(CHEN Zuyu, SHAO Changming. The use of the method of optimization for minimizing safety factors in slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 10(4): 1 - 13.(in Chinese))
- [11] 何满潮, 姚爱军, 鹿 粗, 等. 边坡岩体水力学作用的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 662 - 666.(HE Manchao, YAO Aijun, LU Cu, et al. Study of mechanical functions of underground water in slope rock mass[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1998, 17(6): 662 - 666.(in Chinese))
- [12] 刘才华, 徐 健, 曹传林, 等. 岩质边坡水力驱动型顺层滑移破坏机制分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(19): 3 529 - 3 533.(LIU Caihua, XU Jian, CAO Chuanlin, et al. Analysis of bedding-slip failure mechanism of rock slope due to hydraulic drive[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(19): 3 529 - 3 533.(in Chinese))
- [13] 吴恒滨, 何泽平, 曹卫文. 基于不同水压分布的平面滑动边坡稳定性研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(8): 2 493 - 2 499.(WU Hengbin, HE Zeping, CAO Weiwen. Stability study of slope with planar failure based on different water pressure distributions[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(8): 2 493 - 2 499.(in Chinese))
- [14] 李 伟, 吴礼舟, 肖 蓉. 平推式滑坡中承压水的敏感性研究[J]. 工程地质学报, 2017, 25(2): 480 - 487.(LI Wei, WU Lizhou, XIAO Rong. The sensitivity of confined water in the translational landslide[J]. Journal of Engineering Geology, 2017, 25(2): 480 - 487.(in Chinese)).
- [15] 舒继森, 王兴中, 周毅勇. 岩石边坡中滑动面水压分布假设的改进[J]. 中国矿业大学学报, 2004, 33(5): 509 - 512.(SHU Jisen, WANG Xingzhong, ZHOU Yiyong. Improving on assumption for water pressure distributing on failure surface in rock slope[J]. Journal of China University of Mining and Technology, 2004, 33(5): 509 - 512.(in Chinese))
- [16] 李 伟, 肖 蓉, 吴礼舟. 岩质边坡中结构面上水压分布假设的改进研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(3): 599 - 608.(LI Wei, XIAO Rong, WU Lizhou. Improvement of water pressure distribution along the structural plane in rock slopes[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(3): 599 - 608.(in Chinese))
- [17] 黄醒春, 陶连金, 曹文贵. 岩石力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 182 - 219.(HUANG Xingchun, TAO Lianjin, CAO Wengui. Rock mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005: 182 - 219.(in Chinese))
- [18] 赵 昕, 张晓元, 赵明登, 等. 水力学[M]. 北京: 中国电力出版社, 2009: 12 - 33.(ZHAO Xin, ZHANG Xiaoyuan, ZHAO Mingdeng, et al. Hydraulics[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2009: 12 - 33.(in Chinese))