

轴力对自由边界 Timoshenko 梁 横向动特性影响研究

王 乐, 余慕春

(中国运载火箭技术研究院, 北京 100076)

摘要:从 Timoshenko 梁平衡方程出发, 结合梁的内力和位移参数的关系, 建立了轴力作用下 Timoshenko 梁自由振动偏微分方程; 采用分离变量法求解自由边界轴力作用下 Timoshenko 梁自由振动方程; 给出了求解 Timoshenko 梁固有频率的方程。在自由边界无轴力作用条件下, 将固有频率计算结果与 Euler 梁计算结果对比, 验证了给出的梁运动方程求解方法的正确性; 为了估算轴力对导弹横向动特性的影响, 建立了截面为环形的 Timoshenko 梁模型, 不同轴向压力下横向固有频率计算结果表明, 轴向压力对最低阶频率的影响最大, 阶次越高影响越小。

关键词: Timoshenko 梁; 轴力; 自由边界条件; 固有频率

本文引用格式:王乐, 余慕春. 轴力对自由边界 Timoshenko 梁横向动特性影响研究[J]. 兵器装备工程学报, 2018(3): 36-39.

Citation format: WANG Le, YU Muchun. Effect of Axial Force on the Lateral Vibration Characteristics of Timoshenko Beam Under Free Boundary Condition[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2018(3): 36-39.

中图分类号: O327; TJ76

文献标识码: A

文章编号: 2096-2304(2018)03-0036-04

Effect of Axial Force on the Lateral Vibration Characteristics of Timoshenko Beam Under Free Boundary Condition

WANG Le, YU Muchun

(China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: The partial differential equation of Timoshenko beam's free vibration with axial force is established based on equilibrium equations and the relationship between internal forces and displacements. The partial differential equation is solved by variable separation approach, the equation of Timoshenko beam's frequencies is provided. The method of deduction is validated by the results of Euler beam without axial force. The Timoshenko beam model with annular cross section is built to estimate the effects of axial force on the lateral vibration characteristics of the missile, the results show that the effect on natural frequencies decreases with the increase of orders.

Key words: Timoshenko beam; axial force; free boundary condition; natural frequency

导弹的横向动特性对其在飞行过程中的稳定性及动载荷等有较大影响, 在飞行过程中, 导弹除了承受横向载荷, 还要承受由发动机推力、气动阻力等导致的很大的轴向载荷。轴向载荷会对导弹的横向动特性产生一定的影响, 在某些情况下, 例如在计算潜射导弹出筒或出水过程的横向载荷时, 这种影响是不可忽视的, 因此有必要研究其对横向动特性的

影响程度。由于导弹是细长体, 其横向动特性一般采用梁模型进行计算, 很多学者也用梁模型研究轴向载荷对横向动特性的影响。对于 Euler 梁在轴向力作用下的横向振动, 已经有一些文献进行了研究。宋健^[1]给出了轴向力作用下求解等截面 Euler 梁横向动特性的解析方法, 研究了推力和空气阻力对火箭横向振动频率和振型的影响; 张广芸等^[2]给出了

轴力对于 Euler 梁横向振动固有频率影响系数的高精度表达式;张光辉等^[3]基于 Euler 梁理论,研究了轴向荷载对锚杆横向振动影响;龚善初^[4]研究了简支 Euler 梁在轴向荷载作用下固有频率与轴向荷载的关系。

Timoshenko 梁理论^[5]在模型中引入了剪切变形和转动惯量,与 Euler 梁理论相比,其模型更准确,在工程设计中得到了广泛应用^[6-9]。刘吉源等^[10]利用瑞雷法得到任意边界条件下梁固有频率的泛函方程,建立了轴力作用下两端固支 Timoshenko 梁的频率方程,讨论了轴向力、转动惯量和剪切变形对解的影响;王英华^[11]建立了潜射导弹的 Timoshenko 梁有限元模型,将轴力产生的预应力加入梁单元中进行模式分析,计算了出水过程中轴向荷载对潜射导弹横向振动特性的影响,对于自由边界条件下 Timoshenko 梁在轴向力作用的横向振动问题,有必要用解析的方法进行研究。

本文给出了轴力作用下 Timoshenko 梁自由振动的偏微分方程,采用分离变量法求解,给出了轴力作用下自由边界 Timoshenko 梁固有频率的控制方程。建立了截面为环形的自由边界 Timoshenko 梁模型,计算了轴力对 Timoshenko 梁横向动特性的影响,本文给出的计算方法对导弹横向动特性设计具有一定的参考意义。

1 轴力作用下 Timoshenko 梁自由振动方程

设梁的材料密度为 ρ , 长度为 l , 作用在梁两端的轴向压力为固定值 T , 作用在梁上单位长度的横向力为 q_1 , 如图 1 所示, 梁的单位长度的惯性力和惯性力矩分别为 q 和 m , 梁截面的线位移为 y , 角位移为 φ , 截面的面积为 A , 绕横轴的惯性矩为 I 。

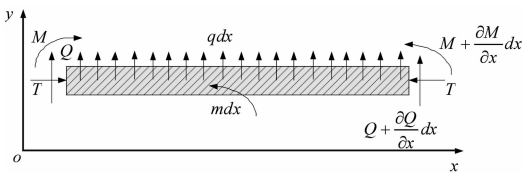


图 1 轴力作用下梁的受力图

由梁的内力和位移参数的关系可知

$$M = EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1)$$

$$Q = -C \left(\frac{dy}{dx} - \varphi \right) \quad (2)$$

式(2)中 C 是截面的抗弯刚度,为

$$C = kGA \quad (3)$$

其中 k 是 Timoshenko 梁截面的剪切系数。

设梁的截面为等截面,作用在梁上的横向力 q_1 不随时间变化,可得 Timoshenko 梁模型的运动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

式(4)中 $T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 是轴力对 Timoshenko 梁模型的影响项。

2 轴力作用下自由边界 Timoshenko 梁自由振动方程的求解

为了求解式(4),采用变量分离法,令

$$y = W(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

式(5)中, $W(x)$ 是振型, ω 是梁的固有频率,将式(5)代入式(4),可得

$$EIW''''(x) - \rho A \omega^2 W(x) + \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) W''(x) \omega^2 + \frac{\rho^2 I}{kG} W(x) \omega^4 + TW''(x) = 0 \quad (6)$$

令 $W(x) = De^{\lambda x}$, 由式(6),可得

$$EI\lambda^4 + \left[\rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) \omega^2 + T \right] \lambda^2 + \frac{\rho^2 I}{kG} \omega^4 - \rho A \omega^2 = 0 \quad (7)$$

式(7)是关于 λ 的四次方程,令

$$B = \rho \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{kG} \right) \omega^2 + \frac{T}{EI} \quad (8)$$

可得 λ 的 4 个根分别为

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm a_1 \\ \lambda_{3,4} = \pm a_2 j \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$a_1 = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \left(\frac{\rho^2 \omega^4}{kGE} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)}}{2}} \quad (10)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4 \left(\frac{\rho^2 \omega^4}{kGE} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)}}{2}} \quad (11)$$

则 $W(x)$ 的形式可写为

$$W(x) = C_1 \cos a_2 x + C_2 \sin a_2 x + C_3 \cosh a_1 x + C_4 \sinh a_1 x \quad (12)$$

对于两端自由的梁,其边界条件为

$$\begin{cases} M = 0, & x = 0, l \\ Q = 0, & x = 0, l \end{cases} \quad (13)$$

梁的线位移和角位移有如下关系式

$$-\frac{\rho A}{C} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (14)$$

将上式对 x 进行积分,得

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi = \frac{\rho A}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int y dx \quad (15)$$

由式(1),式(2),式(13),式(14)和式(15),可得式(4)的边界条件为

$$\begin{cases} -\frac{\rho A}{C} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 & x = 0, l \\ \int y dx = 0 & x = 0, l \end{cases} \quad (16)$$

将式(5)代入式(16)可得

$$\begin{cases} \frac{\rho A}{C} \omega^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 & x = 0, l \\ \int W dx = 0 & x = 0, l \end{cases} \quad (17)$$

将式(12)代入上式,可得

当 $x=0$ 时,有

$$\begin{cases} -\frac{C_2}{a_2} + \frac{C_4}{a_1} = 0 \\ \left(\frac{\rho A}{C} \omega^2 - a_2^2\right) C_1 + \left(\frac{\rho A}{C} \omega^2 + a_1^2\right) C_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

当 $x=l$ 时,有

$$\begin{cases} \frac{C_1}{a_2} \sin a_2 l - \frac{C_2}{a_2} \cos a_2 l + \frac{C_3}{a_1} \sinh a_1 l + \frac{C_4}{a_1} \cosh a_1 l = 0 \\ \frac{\rho A}{C} \omega^2 (C_1 \cos a_2 l + C_2 \sin a_2 l + C_3 \cosh a_1 l + C_4 \sinh a_1 l) + \\ (-C_1 a_2^2 \cos a_2 l - C_2 a_2^2 \sin a_2 l + C_3 a_1^2 \cosh a_1 l + C_4 a_1^2 \sinh a_1 l) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

令 $k_1 = a_1/a_2$, $k_2 = (\rho \omega^2 - a_2^2 kG)/(\rho \omega^2 + a_1^2 kG)$, 可得

$$\begin{cases} \left(\frac{\sin a_2 l}{a_2} - \frac{k_2}{a_1} \sinh a_1 l\right) C_1 + \left(-\frac{\cos a_2 l}{a_2} + \frac{\cosh a_1 l}{a_2}\right) C_2 = 0 \\ \left[\frac{\rho}{kG} \omega^2 (\cos a_2 l - k_2 \cosh a_1 l) - a_2^2 \cos a_2 l - k_2 a_1^2 \cosh a_1 l\right] C_1 + \\ \left[\frac{\rho}{kG} \omega^2 (\sin a_2 l + k_1 \sinh a_1 l) - a_2^2 \sin a_2 l + k_1 a_1^2 \sinh a_1 l\right] C_2 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式(20)是关于 C_1 和 C_2 的线性方程组,为了使得 $W(x)$

有非零解,则 C_1 和 C_2 必有非零解,因此有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin a_2 l}{a_2} - \frac{k_2}{a_1} \sinh a_1 l\right) \left[\frac{\rho}{kG} \omega^2 (\sin a_2 l + k_1 \sinh a_1 l) - a_2^2 \sin a_2 l + k_1 a_1^2 \sinh a_1 l\right] - \\ & \left(-\frac{\cos a_2 l}{a_2} + \frac{\cosh a_1 l}{a_2}\right) \left[\frac{\rho}{kG} \omega^2 (\cos a_2 l - k_2 \cosh a_1 l) - a_2^2 \cos a_2 l - k_2 a_1^2 \cosh a_1 l\right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)是关于 Timoshenko 梁固有频率 ω 的方程,该方程为超越方程,解此方程即可求得有轴力作用下自由边界 Timoshenko 梁的固有频率,求出 ω 后,可求得振型 $W(x)$ 。

3 算例

以自由边界的钢质梁为例,设 $E = 2 \times 10^{11}$ Pa, $I = 8.333 \times 10^{-6}$ m⁴, $A = 0.01$ m², $\rho = 7\,800$ kg/m³, $l = 5$ m, $k = 0.851$ 。为了检验式 21 计算方法的正确性,在无轴力作用条件下,将固有频率计算结果与 Euler 梁理论进行对比。由文献[12]和文献[13]可知,自由边界 Euler 梁的固有频率方程为

$$\begin{cases} \cos al \cosh al = 1 \\ \omega = a^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \end{cases} \quad (22)$$

令 $T=0$,由式(21)计算 Timoshenko 梁的固有频率,用二分法求解超越方程,设置搜索步长 $d\omega = 0.001$ rad/s,误差 $\text{eps} =$

$1e-6$ 。由式(22)直接计算 Euler 梁的固有频率,结果见表 1。

表 1 自由边界条件下 Timoshenko 梁和 Euler 梁固有频率对比

阶次	Euler 梁/Hz	Timoshenko 梁/Hz	相对偏差/%
1	20.82	20.79	-0.14
2	57.39	57.15	-0.42
3	112.50	111.60	-0.80
4	185.98	183.53	-1.32
5	277.82	272.42	-1.94
6	388.02	377.64	-2.68

由计算结果可知,由式(21)和式(22)分别计算 Timoshenko 梁和 Euler 梁的各阶固有频率相近,其中 Euler 梁各阶固有频率均高于 Timoshenko 梁,这是由于 Euler 梁忽略了截面的剪切变形和转动惯量导致的。

在式(21)中引入轴向压力,计算不同轴向压力对自由边界 Timoshenko 梁横向一阶固有频率的影响。计算结果见表 2。

表 2 轴向压力对自由边界 Timoshenko 梁横向一阶固有频率的影响

T/N	频率/Hz	频率变化/%
0	20.79	0.00
100 000	19.18	-7.74
200 000	17.41	-16.25
300 000	15.42	-25.81
400 000	13.12	-36.89
500 000	10.29	-50.51
600 000	6.25	-69.96
657 947	0.01	-99.93

从表 2 可知,当轴向压力逐渐增大时,自由边界 Timoshenko 梁横向一阶固有频率逐渐降低至零,本文求得的一阶固有频率降为零时的轴向压力,即临界压力 $T_{cr} = 6.579\,47e5$ N,这个结果与文献[10]相近。

导弹在飞行过程中在主动段往往要承受较大的压缩载荷,其舱段截面一般为薄壁圆环,为了估算轴向压力对导弹飞行横向动特性的影响,建立了截面为环形的 Timoshenko 梁模型,剪切系数 k 的计算使用文献[14]的方法,表达式为

$$k = \frac{96(1+\nu)^2}{204\nu^2 + 420\nu + 219} \quad (23)$$

式(23)中 ν 是材料的泊松比。采用式(21)计算方法求得的前三阶固有频率见表 3。其前三阶横向振型见图 2。

表3 无轴力作用下梁的横向固有频率

阶次	频率/Hz
1	9.52
2	23.82
3	41.66

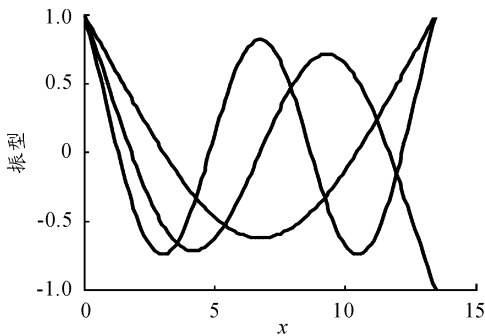


图2 无轴力作用下梁的前三阶横向振型

计算了不同轴向压力对该梁前三阶横向固有频率的影响,计算结果见表4。

表4 轴向压力对环形截面 Timoshenko 梁横向固有频率的影响

T/N	一阶 频率/ Hz	变化/ %	二阶 频率/ Hz	变化/ %	三阶 频率/ Hz	变化/ %
0	9.52	0.00	23.82	0.0	41.66	0.00
100 000	9.46	-0.63	23.78	-0.17	41.63	-0.07
200 000	9.4	-1.26	23.73	-0.38	41.59	-0.17
300 000	9.34	-1.89	23.69	-0.55	41.56	-0.24
400 000	9.28	-2.52	23.64	-0.76	41.52	-0.34
500 000	9.22	-3.15	23.60	-0.92	41.49	-0.41

从以上计算结果可见,轴向压力对最低阶频率的影响最大,阶次越高影响越小。当轴向压力为 500 000 N 时,导弹横向第一阶频率降低 3.15%,第二阶频率降低 0.92%,第三阶频率降低 0.41%。

4 结论

1) 本文给出了轴力作用下 Timoshenko 梁自由振动方程,在自由边界下,采用分离变量法求解该方程,给出了轴力作用下自由边界 Timoshenko 梁固有频率的方程;

2) 在无轴力作用及自由边界条件下,通过求解固有频率的超越方程,得到的 Timoshenko 梁固有频率计算结果与 Euler 梁计算结果接近,验证了本文给出的自由边界轴力作用下 Timoshenko 梁自由振动方程求解方法的正确性;

3) 为了估算轴力对导弹横向动特性的影响,本文建立了截面为环形的 Timoshenko 梁模型,不同轴向压力下横向固有频率计算结果表明,轴向压力对最低阶频率的影响最大,阶次越高影响越小。当轴向压力为 500 000 N 时,导弹横向第一阶频率降低 3.15%,第二阶频率降低 0.92%,第三阶频率降低 0.41%。

参考文献:

- [1] 宋健. 在推力和阻力作用下飞行器横向振动分析[J]. 中国工程科学, 2000, 10(2): 63-72.
- [2] 张广芸, 张宏生, 陆念力. Bernoulli-Euler 梁横向振动固有频率的轴力影响系数[J]. 工程力学, 2011, 28(10): 65-71.
- [3] 张光辉, 茅献彪, 吴宇, 晁刚伟. 轴向荷载对锚杆横向振动特性影响的数值分析[J]. 矿业研究与开发, 2015, 35(3): 42-46.
- [4] 龚善初. 轴向载荷作用下简支梁横向振动的固有频率[J]. 甘肃科学学报, 2004, 16(3): 99-101.
- [5] TIMOSHENKO S P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibrations of bars of prismatic bars[J]. Philosophical Magazine, 1921, 41(5): 744-746.
- [6] 张会端, 孙俊岭. 弹性支承条件下传动丝杠的横向振动分析[J]. 长春大学学报, 2011, 21(2): 16-20.
- [7] 梁荣柱, 林存刚, 夏唐代, 吴世明. 考虑隧道剪切效应的基坑开挖对邻近隧道纵向变形分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(1): 223-233.
- [8] 徐志胜, 翟婉明, 王开云. 基于 Timoshenko 梁模型的车辆轨道耦合振动分析[J]. 西南交通大学学报, 2003, 38(1): 22-27.
- [9] 龙丽丽, 刘东甲, 卢志堂, 等. 基于 Timoshenko 梁模型的完整桩瞬态横向振动模拟计算[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2011, 34(3): 403-407.
- [10] 刘吉源, 戈新生, 陈立群. 轴向力作用下 Timoshenko 梁的横向振动[J]. 北京机械工业学院学报, 2000, 15(3): 56-59.
- [11] 王英华. 轴向载荷对潜射导弹横向振动特性影响分析[J]. 导弹与航天运载技术, 2002(6): 9-15.
- [12] 盛宏玉. 结构动力学[M]. 合肥: 合肥工业大学出版社, 2007: 203-205.
- [13] 卓曙君, 葛玉君. 梁的横向振动频率方程的一般表达式[J]. 国防科技大学学报, 1988, 10(3): 27-32.
- [14] 王乐, 王亮. 一种新的计算 Timoshenko 梁截面剪切系数的方法[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(7): 756-763.