

# 基于广义子集模拟样本加权法的边坡多失效模式可靠度分析

杨智勇<sup>1, 2</sup>, 李典庆<sup>1, 2</sup>, 曹子君<sup>1, 2</sup>, 唐小松<sup>1, 2</sup>

(1. 武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 武汉大学 水利水电学院, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 边坡通常包含多个潜在的破坏模式, 边坡多失效模式系统可靠度计算的蒙特卡洛模拟方法在求解小失效概率问题时计算效率较低。为此, 提出基于广义子集模拟样本加权法的边坡多失效模式可靠度分析方法, 推导了多失效模式对应于不同失效阈值时的失效概率计算公式。采用概率故障树模型构建边坡多失效模式系统可靠度分析模型, 通过耦合系统模式的广义子集模拟驱动变量划分整体样本空间, 基于广义子集模拟执行过程中的样本子空间概率权来估计相应空间中样本权系数, 通过样本权系数计算失效模式在不同失效阈值下的失效概率。以岩质边坡楔形体稳定问题为例阐明所提方法的有效性。结果表明: 提出的广义子集模拟样本加权方法极大地提高了边坡系统可靠度及其分量失效模式可靠度的计算效率。该方法不仅能够通过一次模拟实现多模式可靠度的求解, 避免针对不同失效模式进行重复模拟的问题, 而且能够显著地提高估计低概率水平失效模式可靠度的计算效率。此外, 提出的广义子集模拟样本加权方法不仅能够高效地估计临界失效阈值对应的失效概率, 也能够同时计算多模式在任一失效阈值时的失效概率。

**关键词:** 边坡工程; 多失效模式; 失效阈值; 系统可靠度; 广义子集模拟; 样本权

**中图分类号:** P 642

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2018)03 - 0630 - 12

## Efficient analysis of slope reliability with multiple failure modes using sample weighting method in generalized subset simulation

YANG Zhiyong<sup>1, 2</sup>, LI Dianqing<sup>1, 2</sup>, CAO Zijun<sup>1, 2</sup>, TANG Xiaosong<sup>1, 2</sup>

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Sciences, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China; 2. School of Water Resources and Hydropower Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

**Abstract:** It is not uncommon that a slope involves multiple possible failure modes. Monte Carlo simulation provides a way to estimate the failure probabilities of these multiple modes. However, it incurs frequent criticisms because of its low efficiency at small failure probability levels. To address this problem, a sample weighting method combined with the generalized Subset Simulation(GSS) is proposed in this paper to estimate efficiently the reliabilities of geotechnical structure system and the multiple failure modes involved in this system. The equations for calculating the failure probability at various failure threshold values of each mode are derived. The probabilistic fault tree model is employed to establish the limit state function of sophisticated system response. This limit state function of system is then incorporated into the driving variable of GSS to divide the whole

**收稿日期:** 2017 - 05 - 18; **修回日期:** 2017 - 08 - 11

**基金项目:** 国家杰出青年科学基金项目(51225903); 国家自然科学基金资助项目(51329901, 51528901)

Supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars(Grant No. 51225903) and National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 51329901 and 51528901)

**作者简介:** 杨智勇(1989 - ), 男, 2012年毕业于武汉大学水利水电工程专业, 现为博士研究生, 主要从事岩土工程可靠度与风险分析方面的研究工作。E-mail: yzywhu@163.com。通讯作者: 曹子君(1987 - ), 男, 博士, 现任副教授, 主要从事岩土工程可靠度与风险控制方面的研究工作。E-mail: zijuncao@whu.edu.cn

**DOI:** 10.13722/j.cnki.jrme.2017.0643

random sample space into several mutually independent and collectively exhaustive sub-spaces. In the implementation of GSS, the probability weighting coefficients of different sub spaces are determined adaptively. With the probability weighting coefficients, the weighting coefficients of samples in each sub space are estimated properly, which can be further used to compute the failure probability of each failure mode in the system with different failure threshold values. A rock wedge slope is employed to demonstrate the performance of the proposed method. It was found that the proposed method improved significantly the computational efficiency in estimating the reliabilities of the multiple failure modes in the geotechnical structure system. The proposed method not only estimate the reliabilities of multiple failure modes through a single simulation and avoid the repeated simulation for different failure modes, but also enhance the efficiency of computing the failure probability of failure modes at low failure probability level. Moreover, it provides the failure probability values corresponding to various failure threshold values for all the modes concerned.

**Key words:** slope engineering; multiple failure modes; failure threshold value; system reliability; generalized subset simulation; sample weighting

## 1 引言

由于岩土体参数的空间变异性、土层分层及岩土结构面产状等影响, 边坡失效通常存在多种可能的破坏模式<sup>[1-3]</sup>, 相应的边坡稳定可靠度就属于多失效模式系统可靠度问题<sup>[4-7]</sup>。为了全面掌握边坡工程的整体风险并识别潜在的破坏模式, 亟需有效地估计边坡系统及其分量失效模式可靠度<sup>[8-10]</sup>。此外, 传统的可靠度分析一般都只考虑失效阈值为 0 (即临界失效阈值) 的情况, 如果功能函数小于 0 则认为该模式失效。然而, 某些时候工程师可能会同时关注在其它失效阈值下的失效概率, 此时就涉及到对每一个失效阈值进行重复失效概率计算, 计算量显著增大。为了提高计算效率, 理想的情况是通过一次针对临界失效阈值的可靠度分析能同时得到其他失效阈值对应的失效概率<sup>[11-12]</sup>。

传统的可靠度计算方法如一阶可靠度法 (first order reliability method, FORM) 虽然也可估计边坡系统及其分量模式的可靠度<sup>[13]</sup>, 然而该方法需要针对每个失效模式可靠度进行重复计算, 且 FORM 计算精度对极限状态函数非线性程度较敏感<sup>[14-15]</sup>。此外, FORM 不能有效地估计任一失效阈值对应的失效概率。为了得到不同失效阈值对应的失效概率, 需要重新确定极限状态方程再求解。基于随机模拟的方法如蒙特卡洛模拟 (Monte Carlo simulation, MCS) 可以解决上述问题。MCS 能够通过一次随机模拟给出失效模式在不同失效阈值下的失效概率, 且其概念简单, 适用性强, 受到众多岩土工程师的青睐。然而, 对于低失效概率水平问题, MCS 需要大量的随机样本<sup>[16]</sup>。此外, 对于大型复杂岩土结构

物, 其极限状态方程往往没有显式表达式, 通常需要借助于有限元法等数值手段进行计算, 此时 MCS 计算量会进一步增加, 导致该方法在实际工程中的应用受到很大的限制。为了解决上述问题, S. K. Au 和 J. L. Beck<sup>[17]</sup>提出了改进的 MCS 即子集模拟 (subset simulation, SS), 子集模拟通过将小失效概率事件表达为一系列具有相对较大失效概率的中间事件的乘积, 有效地提高了计算效率。遗憾的是, SS 仅能有效地计算单失效模式可靠度问题, 对于多失效模式可靠度问题其仍需要重复计算, 导致计算效率仍然较低。为此, W. Hsu 和 J. Ching<sup>[18]</sup>提出了平行子集模拟 (parallel subset simulation, PSS) 算法, 该方法通过构建一个与多失效模式相关的新的驱动变量来同时估计多失效模式的可靠度。尽管 PSS 可通过一次随机模拟估计多模式在任一失效阈值下的失效概率, 然而, 不同模式可靠度估计的精度受该模式和新驱动变量间相关性的影响。H. Li 等<sup>[19]</sup>进一步提出了广义子集模拟算法 (Generalized subset simulation, GSS), GSS 采用多失效模式失效域并集作为驱动变量, 有效地避免了 PSS 中多失效模式与驱动变量之间相关性的影响。杨智勇等<sup>[10]</sup>进一步提出了基于 GSS 的黏性土坡系统可靠度求解方法。需要指出的是, 杨智勇等<sup>[10, 19]</sup>可靠度求解均针对临界失效阈值情况, 并不能求解任一失效阈值下的失效概率。

本文提出了基于广义子集模拟样本加权法的多失效模式可靠度分析方法。首先介绍了 SS 采用样本权方法估计单一失效模式在任一失效阈值下的失效概率计算过程, 接着推导了广义子集模拟求解多失效模式对应于不同失效阈值时的失效概率计算公式, 最后以岩质边坡楔形体稳定问题为例阐明了所

提方法的有效性。

## 2 子集模拟

子集模拟方法本质上是改进的蒙特卡洛模拟方法(MCS)，因此，为了便于读者理解本文方法，先简要介绍 MCS。MCS 通过大量重复抽样来估计目标事件的失效概率。设与事件  $E$  相关的不确定性参数为  $\mathbf{x}$ ，其分布为  $f(\mathbf{x})$ ，事件  $E$  的功能函数定义为  $G(\mathbf{x})$ ，其失效阈值为  $y$ 。一般定义事件的失效阈值为 0，即  $G(\mathbf{x}) < 0$  表示失效，当  $G(\mathbf{x}) = 0$  表示出于临界状态，当  $G(\mathbf{x}) > 0$  表示安全。采用 MCS 计算事件  $E$  的失效概率  $P_f$  为

$$P(G(\mathbf{x}) < 0) = \int_{G(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} I[G(\mathbf{x}_i)] = \frac{n_s}{N_T} \quad (1)$$

式中： $I[G(\mathbf{x})]$  为示性函数，当  $G(\mathbf{x}) \leq 0$  时， $I[G(\mathbf{x})] = 1$ ，当  $G(\mathbf{x}) > 0$  时， $I[G(\mathbf{x})] = 0$ ； $N_T$  为蒙特卡洛抽样样本数目； $\mathbf{x}_i$  第  $i$  个样本； $n_s$  为落在失效域的样本数。注意到式(1)中的  $1/N_T$  也可看做每个样本的加权系数，对应于任一失效阈值  $y$  的失效概率可通过  $G(\mathbf{x})$  小于该失效阈值对应的样本加权系数叠加来计算，即

$$P(G(\mathbf{x}) < y) \approx \sum_{i=1}^{n_y} \frac{1}{N_T} = \sum_{i=1}^{n_y} w(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

式中： $n_y$  为响应值小于  $y$  的样本数； $w(\mathbf{x}_i)$  为样本  $\mathbf{x}_i$  的权系数。理论上说，根据式(2)，MCS 可直接估计功能函数对应任一失效阈值的失效概率，但是对于小失效概率问题，MCS 需要大量的失效样本才能保证计算精度，相应的计算效率较低，对于复杂结构可靠度计算该缺点更为突出。

为了提高 MCS 在求解小失效概率问题的计算效率，S. K. Au 和 J. L. Beck<sup>[17]</sup> 提出了改进的 MCS 即子集模拟算法(SS)。SS 的核心是通过条件概率将一个小失效概率事件  $E$  的发生概率表达为一系列中间事件  $\{E^{(k)}, k = 1, 2, \dots, m\}$  的条件概率的乘积，并通过马尔科夫链蒙特卡洛模拟(Markov chain monte carlo simulation, MCMCS)产生中间失效事件的条件失效样本，进而逼近目标失效区  $E = \{G(\mathbf{x}) < y\}$ ， $y$  为事件  $E$  的临界响应值<sup>[20-21]</sup>。在 SS 中，中间条件事件的发生概率相对较大，只需少量样本即可估计其发生概率。中间条件事件通过事件  $E$  响应值自适应确定，同时对样本空间进行划分。为了有效逼近目标失效域，设  $y = y^{(m)} < y^{(m-1)} \dots < y^{(2)} < y^{(1)}$ ，定义

中间事件  $E^{(k)}$  为  $E^{(k)} = \{G(\mathbf{x}) < y^{(k)}, k = 1, 2, \dots, m\}$ ，那么中间失效事件可被表示为一系列互相嵌套的失效事件  $E = E^{(m)} \subset E^{(m-1)} \dots \subset E^{(2)} \subset E^{(1)}$ 。根据条件概率理论，可求得  $P(E)$  为

$$P(E) = P(E^{(m)}) = P(E^{(1)}) \prod_{k=2}^m P(E^{(k)} | E^{(k-1)}) \quad (3)$$

其中，

$$P(E^{(1)}) = P\{G(\mathbf{x}) < y^{(1)}\}$$

$$P(E^{(k)} | E^{(k-1)}) = \{P(G(\mathbf{x}) < y^{(k)} | G(\mathbf{x}) < y^{(k-1)}),$$

$$k = 2, 3, \dots, m\}$$

在子集模拟过程中，为方便计算，根据条件失效样本对应的响应值自适应选择合适的中间失效事件的阈值  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}$ ，使得  $P(E^{(1)})$  和  $\{P(E^{(k)} | E^{(k-1)}), k = 2, 3, \dots, m\}$  的估计值对应于一个常量  $p_0$ 。子集模拟的详细执行过程可参考 S. K. Au 等<sup>[17, 22]</sup> 的研究成果。

需要指出的是 SS 可通过  $y$  取不同的值根据式(3)来估计事件  $E$  对应任一失效阈值的失效概率，这个过程并不要求 SS 针对不同的  $y$  进行重复模拟。与 MCS 类似，另一种求解任一  $y$  对应失效概率的方法为基于 SS 的加权样本方法。在 SS 中，随机变量样本空间  $\Omega$  被中间事件  $E^{(k)} = \{G(\mathbf{x}) < y^{(k)}, k = 1, 2, \dots, m\}$  重新划分为一系列互斥子空间， $\Omega_0 = \{G(\mathbf{x}) > y^{(1)}\}$ ， $\Omega_1 = \{G(\mathbf{x}) > y^{(2)} | G(\mathbf{x}) \leq y^{(1)}\}$ ， $\dots$ ， $\Omega_k = \{G(\mathbf{x}) > y^{(k)} | G(\mathbf{x}) \leq y^{(k-1)}\}$ ， $\dots$ ， $\Omega_m = \{G(\mathbf{x}) \leq y^{(m)}\}$ 。SS 可看作是在每一样本子空间内的 MCS 重复抽样，即位于  $\Omega_k$  子空间内的样本在该空间内具有权系数  $1/L_k$ ， $L_k$  为  $\Omega_k$  空间内的样本数目。同时注意到，在整个空间  $\Omega$  上每个子空间具有不同的概率权重，具体为： $P(\Omega_0) = 1 - p_0$ ， $P(\Omega_1) = p_0(1 - p_0)$ ， $\dots$ ， $P(\Omega_k) = p_0(1 - p_0)^k$ ， $\dots$ ， $P(\Omega_m) = (p_0)^m$ ，因此在 SS 中每个样本的加权系数可表示为

$$w(\mathbf{x}) = \frac{P(\Omega_k)}{L_k} \quad (4)$$

式中： $w(\mathbf{x})$  为  $\Omega_k$  空间内样本的加权系数。通过式(4)可有效地计算 SS 执行过程中每个样本的加权系数。与 MCS 类似，任一阈值  $y$  对应的失效概率可通过 SS 估计为

$$P(G(\mathbf{x}) < y) \approx \sum_{i=1}^{n_y} w(\mathbf{x}_i) \quad (5)$$

式中： $n_y$  为 SS 中响应值小于的  $y$  样本数， $w(\mathbf{x}_i)$  为 SS 模拟中样本  $\mathbf{x}_i$  的权系数。式(5)可有效地计算

事件  $E$  对应任一失效阈值的失效概率。然而，实际边坡系统通常包含多个失效模式，对于这种存在多个失效模式的边坡可靠度问题，通常 SS 需要重复地针对每个失效模式进行计算，然后通过式(5)估计这些失效模式关于任一失效阈值的可靠度。

### 3 广义子集模拟算法

为了克服 SS 在估计多失效模式系统可靠度时需要重复计算每个失效模式可靠度的局限性，H. Li 等<sup>[19]</sup>提出了解决结构工程中多失效模式可靠度问题的广义子集模拟算法(GSS)，广义子集模拟是 SS 的升级版，该工作不能考虑结构系统可靠度问题。为此，杨智勇等<sup>[10]</sup>进一步提出了基于 GSS 的黏性土坡系统可靠度计算方法，但是仅能考虑单一失效阈值对应的系统可靠度。本节先简要介绍如何通过广义子集模拟方法计算系统可靠度，在此基础上提出了在 GSS 中通过样本加权方法估计每个失效模式对应任一失效阈值的失效概率——即多个失效阈值的系统可靠度问题。对于复杂边坡系统可靠度问题，首先需要该岩土结构系统的响应函数，下面通过概率故障树模型来构建复杂系统的系统响应功能函数。

#### 3.1 概率故障树模型

结构系统根据包含在该系统中各事件间的逻辑关系分为 3 类：串联系统、并联系统、混联系统<sup>[3, 23]</sup>。串联系统表示包含在该系统中的任何子失效模式失效都会导致系统失效；并联系统表示包含在该系统中所有事件失效才会导致系统失效；混联系统则为串联系统和并联系统的结合。对于复杂的混联系统，

如岩质边坡系统，包含在系统中的各个事件间的逻辑关系往往比较复杂，为了能够清晰地反映混联系统中各事件间的逻辑关系，概率故障树模型常用来描述混联系统的逻辑关系。概率故障树模型为一种描述系统内各事件间逻辑关系的图形化工具，主要包含 3 个重要组成部分：底事件、连接门、底事件同连接门之间的关系。与传统的故障树不同，在概率故障树中事件不是用单一的概率值表示，而是用事件的功能函数表示。连接门“OR”表示底事件间是串联关系，逻辑门“AND”表示事件间是并联关系。概率故障树模型为复杂系统可靠度分析提供了一种有效的分析工具。下面以图 1 所示混联系统来说明概率故障树模型的应用，该系统可被分解为三层：系统层、失效模式层、分量模式层。系统失效事件  $E_s$  包含  $n$  个子失效事件  $E_1, E_2, \dots, E_n$ ，任一子失效事件的发生都会导致系统失效事件的发生，系统功能函数可表示为  $G_s = \min\{G_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ，其中  $G_i$  为事件  $E_i$  对应的功能函数。事件  $E_i$  又包含  $j_i$  个子模式，事件  $E_i$  发生有且仅当其全部子模式失效，因此  $G_i = \max\{g_{i,l}, l = 1, 2, \dots, j_i\}$ 。

#### 3.2 GSS 算法原理介绍

GSS 与 SS 的主要不同之处体现在 2 个方面：(1) 中间失效事件的确定；(2) 条件种子样本的选择。如前所述，SS 通过单一事件  $E$  的响应值  $G(x)$  来自适应确定中间失效事件  $\{E^{(k)}, k=1, 2, \dots, m\}$ ，换句话说，在 SS 中样本空间  $\Omega$  的划分通过单一事件确定。对于不同的事件响应，例如  $G_s(x)$  或  $G_i(x)$ ，SS 需要单独针对每一事件进行样本空间划分，进而估计它们的失效概率。GSS 则同时针对多个事件进行样本空间划分，GSS 以多个事件的失效域并

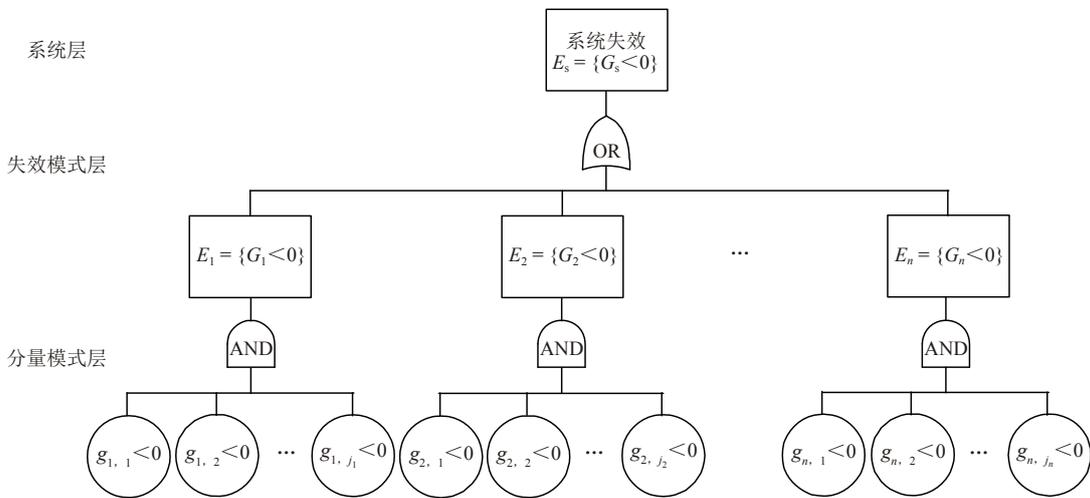


图 1 混联系统概率故障树模型

Fig.1 Probabilistic fault tree model for a combined system

集作为驱动事件，因此可以通过一次运行同时驱动随机样本至多个关联事件的失效区，有效地避免了SS需要单独针对每一事件进行计算的缺点。在GSS中，驱动变量定义为多个事件(即 $E_s$ 和 $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ )失效区域的并集 $U^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), 其中 $M$ 为GSS的模拟层数。 $U^{(k)}$ 可表示<sup>[10, 19]</sup>为

$$U^{(k)} = E_s^{(k)} \cup E_1^{(k)} \cup E_2^{(k)} \cup \dots \cup E_n^{(k)} = \{G_s < y_s^{(k)}\} \cup \{G_1 < y_1^{(k)}\} \cup \{G_2 < y_2^{(k)}\} \cup \dots \cup \{G_n < y_n^{(k)}\} \quad (k = 1, 2, \dots, M) \quad (6)$$

式中： $E_s^{(k)} = \{G_s < y_s^{(k)}\}$ 为在GSS第 $k$ 层的中间失效事件， $E_i^{(k)} = \{G_i < y_i^{(k)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )为 $E_i$ 在GSS第 $k$ 层的中间失效事件。与子集模拟相似，在GSS中同样根据随机模拟样本对应的响应值自适应确定 $y_s^{(k)}$ 和 $y_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。图2给出了GSS算法执行原理图，GSS的执行流程可总结如下：

(1) GSS模拟第一层：根据不确定参数概率分布函数产生 $N$ 个随机样本，根据岩质边坡极限状态函数求解这 $N$ 个样本对应的 $G_s(\mathbf{x}_j)$ 和 $G_i(\mathbf{x}_j)$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, N$ )的响应值。其次对 $G_s(\mathbf{x}_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ )进行升序排序，选择第 $Np_0 + 1$ 个排序后的 $G_s(\mathbf{x})$ 作为 $E_s^{(1)}$ 的阈值 $y_s^{(1)}$ ，此时有 $Np_0$ 个样本满足 $P(E_s^{(1)}) = P(G_s < y_s^{(1)}) = p_0$ 。同样地对每个 $G_i(\mathbf{x})$ 执行类似操作来确定 $y_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )使其满足 $P(E_i^{(1)}) = P(G_i < y_i^{(1)}) = p_0$ 。根据式(6)， $U^{(1)}$ 为

失效域  $E_s^{(1)} = \{G_s < y_s^{(1)}\}$  和  $E_i^{(1)} = \{G_i < y_i^{(1)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )的并集，即满足 $\{G_s < y_s^{(1)}\}$ 或 $\{G_i < y_i^{(1)}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )条件的 $N_1$ 个样本构成了 $U^{(1)}$ 空间，所以 $P(U^{(1)}) \approx N_1/N$ 。

(2) GSS模拟第 $k$  ( $k > 1$ )层：利用 $U^{(k-1)}$ 中的 $N_{k-1}$ 个样本作为种子样本通过MCMCS生成额外 $N - N_{k-1}$ 个属于 $U^{(k-1)}$ 空间的样本，与第一层类似，再通过 $U^{(k-1)}$ 中的 $N$ 个样本来确定 $y_s^{(k)}$ 和 $y_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )使 $P(E_s^{(k)} | U^{(k-1)})$ 和 $P(E_i^{(k)} | U^{(k-1)})$ 等于 $p_0$ ，然后可得到 $N_k$ 个在 $U^{(k)} = E_s^{(k)} \cup E_1^{(k)} \cup E_2^{(k)} \cup \dots \cup E_n^{(k)}$ 空间中的样本，所以 $P(U^{(k)} | U^{(k-1)}) \approx N_k/N$ 。

(3) 重复执行步骤(2)直至样本已逼近各个事件的失效域。

注意到上述过程中 $N_k$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ )为一个动态变化的值，其大小取决于各失效模式间的相关性，这也意味着尽管在每一模拟层对于单独的失效模式其条件失效概率 $P(E_s^{(k)} | U^{(k-1)})$ 和 $P(E_i^{(k)} | U^{(k-1)})$ 是一个常数 $p_0$ ，但是在GSS执行过程中 $P(U^{(k)} | U^{(k-1)})$ 是一个自适应变化的值。

### 3.3 多失效模式概率估计

一般来说边坡系统中不同失效模式的失效概率大小不一样，这就意味着在GSS执行过程中不同失效模式对应的样本会在不同的随机模拟层到达它们的失效域。随着模拟层数的增加，样本首先会到达相对失效概率较大的失效模式的目标失效域，再逼

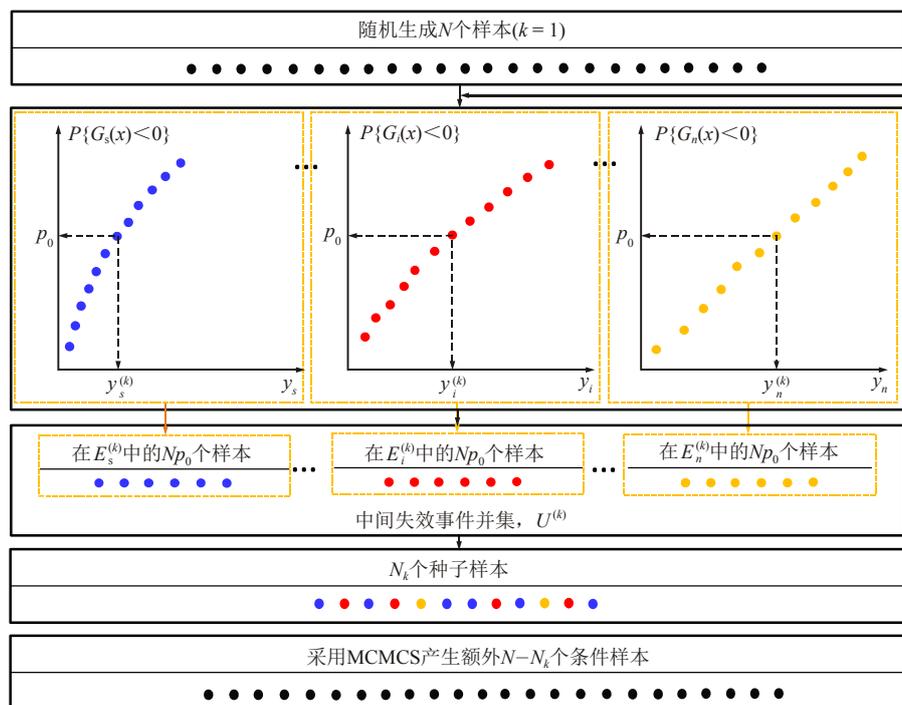


图2 GSS算法执行原理图

Fig.2 Diagram of Generalized Subset Simulation procedure

近失效概率相对较低的失效模式的目标失效域。在此过程中，为了提高 GSS 的计算效率，若某失效模式在第  $k$  层已经到达其目标失效域，则在随后的模拟层中该模式从  $U^{(k)}$  中排除，即构成  $U^{(k)}$  的失效模式数随着模拟层数的增加逐渐减小。设第  $i$  个模式在第  $M_i$  到达失效域， $P(E_i)$  计算可表示为

$$P(E_i) = P(U^{(1)})P(U^{(2)}|U^{(1)}) \cdots P(U^{(M_i-1)}|U^{(M_i-2)}) \cdot P(E_i|U^{(M_i-1)}) = \prod_{k=1}^{M_i-1} \frac{N_k}{N} \frac{N_{E_i, k}}{N} \quad (7)$$

式中： $P(E_i|U^{(M_i-1)})$  为  $E_i$  在  $U^{(M_i-1)}$  空间中的条件概率，其值可用  $E_i$  中的失效样本数  $N_{E_i, k}$  与  $U^{(M_i-1)}$  中的样本数  $N$  的比值来估计。关于采用 GSS 计算涉及多模式系统可靠度的问题可参考杨智勇等<sup>[10]</sup>研究，这里不再赘述。

### 3.4 基于样本加权法的任一失效阈值失效概率估计

根据式(7)可有效解决边坡多失效模式可靠度问题，然而式(7)仅可估计某一给定的失效阈值对应的失效概率，为了得到任一失效阈值对应的失效模式可靠度，需要对每个失效模式的临界响应值  $y_i^{(m)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 取不同的值来重复执行 GSS。这主要是由于 GSS 采用多个失效模式对应的失效域并集来驱动，因此对于单个模式并不能保证其在下一层的样本响应值小于上一层的样本响应值。相比之下，SS 通过单失效模式驱动，可确保其在下一层的样本响应值小于上一层的样本响应值。幸运的是，采用样本加权法在 GSS 中可通过一次模拟估计多失效模式对应任一失效阈值的失效概率。需要注意的是，GSS 与 SS 的主要差异在于二者在中间失效事件定义上的不同，SS 采用单模式来驱动样本至目标失效域，而 GSS 采用多模式中间失效域的并集来同时驱动样本至多个相关模式的目标失效域，换言之，GSS 采用多模式的中间失效域并集对整体样本空间  $\Omega$  进行了划分。与 SS 类似，在 GSS 中随机变量样本空间  $\Omega$  也被重新划分为一系列互斥子空间， $\Omega_0 = \Omega - U^{(1)}$ ， $\Omega_1 = U^{(1)} - U^{(2)}$ ， $\dots$ ， $\Omega_k = U^{(k)} - U^{(k+1)}$ ， $\dots$ ， $\Omega_m = U^{(m)}$ 。同样，GSS 也可看作是在每一样本子空间内的 MCS 重复抽样，每个子空间具有不同的概率权，根据节 3.2 可得： $P(\Omega_0) = 1 - P(U^{(1)})$ ， $P(\Omega_1) = P(U^{(1)})(1 - P(U^{(2)}))$ ， $\dots$ ， $P(\Omega_k) = [1 - P(U^{(k+1)})] \prod_{l=1}^k P(U^{(l)})$ ， $\dots$ ， $P(\Omega_m) = \prod_{l=1}^m P(U^{(l)})$ ，因此每个样本的权系数可计算为

$$w(\mathbf{x}) = \frac{P(\Omega_k)}{L_k} \quad (8)$$

式中： $L_k$  为  $\Omega_k$  子空间中的样本数， $w(\mathbf{x})$  为  $\Omega_k$  空间内样本的权系数。注意到，式(4)中  $L_k$  的大小仅与 SS 每层模拟样本数  $N$ 、条件概率  $p_0$  有关，而式(8)中  $L_k$  的大小还依赖于 GSS 计算过程中各失效模式之间的相关性。确定每个样本对应的权系数后，GSS 中每个失效模式对应任一失效阈值的失效概率可通过下式估计：

$$P(G(\mathbf{x}) < y) \approx \sum_{i=1}^{n_{Gy}} w(\mathbf{x}_i) \quad (9)$$

式中： $n_{Gy}$  为落在模式  $G(\mathbf{x}) = G_s(\mathbf{x})$  和  $G_j(\mathbf{x})$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 对应失效阈值  $y$  中的样本数目； $\mathbf{x}_i$  为第  $i$  个样本； $w(\mathbf{x}_i)$  为样本  $\mathbf{x}_i$  的权系数。通过式(9)可有效估计 GSS 中每个模式对应任一失效阈值的失效概率，由于 GSS 已经通过一次模拟同时得到了  $G_s(\mathbf{x})$  或  $G_j(\mathbf{x})$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 在不同样本子空间内的函数响应，因此这个计算过程并不繁琐。

## 4 计算流程

为了同时估计复杂边坡系统多失效模式对应任一失效阈值的可靠度，本文提出了基于广义子集模拟样本加权方法的多失效模式高效可靠度估计方法。图 3 给出了该方法的计算流程图，具体步骤如下：

- (1) 确定随机参数统计值如均值、标准差、相关性、分布类型等；建立岩土结构物(边坡稳定性)安全系数计算的数值分析模型，根据概率故障树模型构建系统响应的极限状态函数。
- (2) 设置 GSS 每层模拟样本数目  $N$ 、单个失效模式对应的条件概率  $p_0$ ；设置包含边坡系统所有模式在内的初始模式库；由上一步确定参数概率分布函数  $f(x)$  随机抽取  $N$  个样本。
- (3) 评价模式库中每个模式对应的  $N$  个响应值，分别针对每个模式的响应值进行升序排序；判断每个模式排序后第  $N p_0 + 1$  个响应值是否小于临界失效阈值(一般功能函数值小于 0 可视为该模式失效，因此本文将临界失效阈值取为 0)，如果小于临界失效阈值，则认为该模式有足够样本到达失效域，即该模式到达失效域。

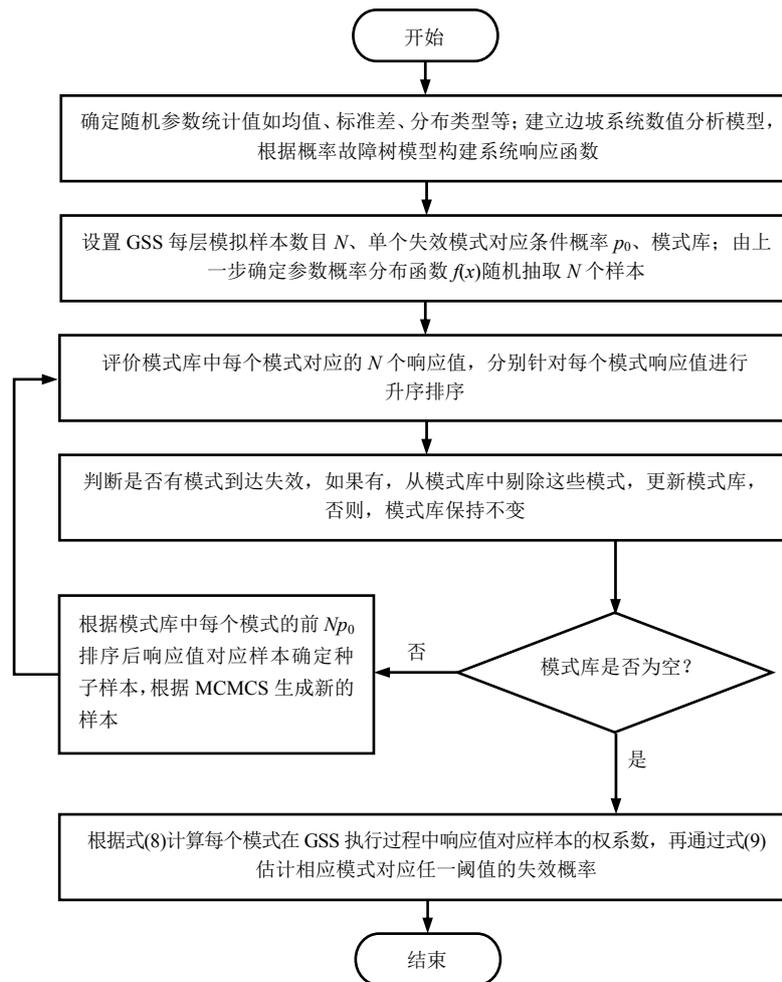


图3 基于广义子集模拟样本权方法的多失效模式高效可靠度估计方法流程图

Fig.3 Flowchart of efficient estimation of reliabilities of multiple modes using sampling weight method in GSS

(4) 判断模式是否到达失效域, 对于已经到达失效域的模式, 则从模式库中剔除这些模式; 如没有模式到达失效域, 则模式库保持不变。

(5) 判断模式库是否为空, 如果不为空, 则根据模式库中每个模式前  $Np_0$  个排序后响应值对应样本确定种子样本, 根据 MCMCS 生成新的样本, 返回第(3)步; 如果为空, 则根据式(8)计算每个模式在 GSS 执行过程中响应值对应样本的权系数, 再通过式(9)估计相应模式对应任一失效阈值的失效概率。

### 5 算例分析

本节以岩质边坡楔形体稳定为例说明所提方法的有效性。在采用 GSS 进行随机模拟时, 与杨智勇等<sup>[10, 19]</sup>一样, 本文 GSS 中每层随机样本数目  $N = 500$ , 单失效模式的条件概率  $p_0 = 0.1$ 。为了与 SS 计算结果对比, 本文 SS 参数设置与 GSS 保持一致。

### 5.1 岩质边坡算例

楔形体破坏为岩质边坡一种常见的破坏类型, 图 4 所示为岩质边坡楔形体稳定分析示意图, 图中楔形体由滑面 1 与滑面 2 切割边坡形成。B. K. Low 等<sup>[13, 24-26]</sup>也对该岩质边坡进行了可靠度分析, 采用该边坡验证所提方法具有一定的代表性。图 4 中结构面产状相关参数  $\delta_1, \delta_2, \theta_1, \theta_2$ , 水压力参数

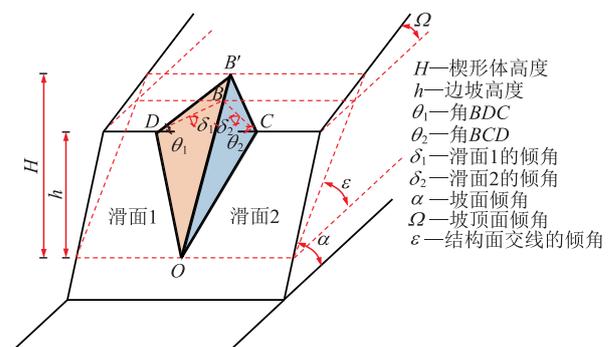


图4 岩质边坡示意图

Fig.4 Illustration of the rock slope example

$G_{w,1}$ ,  $G_{w,2}$ , 切向摩擦角  $\tan \phi_1$ ,  $\tan \phi_2$ , 黏聚力参数  $c_1/(\gamma h)$ ,  $c_2/(\gamma h)$  考虑为独立正态分布, 表 1 给出了这些参数的统计特征<sup>[13]</sup>。

表 1 不确定性参数的统计特征<sup>[13]</sup>

Table 1 Summary of statistical results of uncertain parameters<sup>[13]</sup>

不确定性参数	均值	标准差	分布类型
标准化黏聚力, $c_1/(\gamma h)$ 和 $c_2/(\gamma h)$	0.1	0.02	正态分布
切向摩擦角, $\tan \phi_1$ 和 $\tan \phi_2$	0.7	0.15	正态分布
平面 1 倾角( $B'DO$ ), $\delta_1$	50	2.00	正态分布
平面 2 倾角( $B'CO$ ), $\delta_2$	48	2.00	正态分布
角 $BDC$ , $\theta_1$	62	3.00	正态分布
角 $BCD$ , $\theta_2$	20	3.00	正态分布
标准化水压力参数, $G_{w,1}$ 和 $G_{w,2}$	0.5	0.12	正态分布

图 5 给出了该岩质边坡稳定性分析的概率故障树模型, 在分量模式层, 该边坡包含 9 个模式  $g_1 \sim g_9$ , 失效模式层包含 4 个模式  $E_1 \sim E_4$ , 这 4 个模式可分别视为并联系统可靠度问题。岩质边坡系统  $E_s$  可看成是由  $E_1, E_2, E_3, E_4$  组成的串联系统可靠度问题。根据图 5 所示概率故障树模型建立各个模式的功能函数, 具体可见表 2 中式(10)~(14)。表 2 总结了该岩质边坡所包含失效模式的功能函数, 表中  $s_r$  为岩石相对密度,  $FS, FS_1$  和  $FS_2$  分别代表了岩质边坡沿楔体双滑面、仅沿平面 1 和仅沿平面 2 滑动的安全系数,  $a_1, a_2, b_1, b_2$  均为与结构面产状参数  $\delta_1, \delta_2, \theta_1, \theta_2$  相关的中间参数, 其计算请参

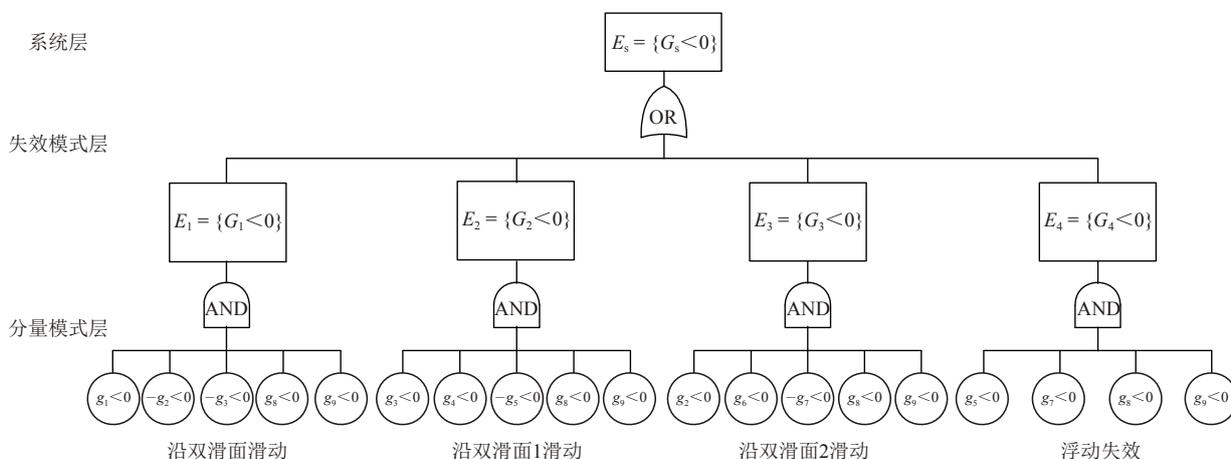


图 5 岩质边坡概率故障树模型

Fig.5 Probabilistic fault tree model of the considered rock slope

表 2 岩质边坡中失效模式的功能函数

Table 2 Performance functions of failure modes of rock slope

功能函数	物理含义	公式编号
$G_s = \min(G_1, G_2, G_3, G_4)$	系统失效, $E_s$	(10)
$G_1 = \max(g_1, -g_2, -g_3, g_8, g_9)$	沿双滑面滑动, $E_1$	(11)
$G_2 = \max(g_3, g_4, -g_5, g_8, g_9)$	仅沿平面 1 滑动, $E_2$	(12)
$G_3 = \max(g_2, g_6, -g_7, g_8, g_9)$	仅沿平面 2 滑动, $E_3$	(13)
$G_4 = \max(g_5, g_7, g_8, g_9)$	浮动失效, $E_4$	(14)
$g_1 = FS - 1$	沿双滑面滑动	(15)
$g_2 = a_1 - \frac{b_1 G_{w1}}{s_r}$	与平面 2 接触条件	(16)
$g_3 = a_2 - \frac{b_2 G_{w2}}{s_r}$	与平面 1 接触条件	(17)
$g_4 = FS_1 - 1$	仅沿平面 1 滑动,	(18)
$g_5 = \left( a_1 - \frac{b_1 G_{w1}}{s_r} \right) - \left( \frac{b_2 G_{w2}}{s_r} - a_2 \right) Z$	仅沿平面 2 浮动条件	(19)
$g_6 = FS_2 - 1$	仅沿平面 2 滑动	(20)
$g_7 = \left( a_2 - \frac{b_2 G_{w2}}{s_r} \right) - \left( \frac{b_1 G_{w1}}{s_r} - a_1 \right) Z$	仅沿平面 1 浮动条件	(21)
$g_8 = \Omega - \epsilon$	楔形体滑动运动学条件	(22)
$g_9 = \epsilon - \alpha$	楔形体滑动运动学条件	(23)

考 B. K. Low 等<sup>[13, 23]</sup>, 这里不再赘述。一般来说, 工程中更为关注失效模式层的 4 个模式  $E_1, E_2, E_3, E_4$  和系统层的系统失效模式  $E_s$  可靠度, 为此, 本文重点研究  $E_1, E_2, E_3, E_4$  及  $E_s$  可靠度。

### 5.2 岩质边坡可靠性分析

表 3 总结了 GSS 一次执行计算该边坡失效概率的过程, GSS 总共执行了 12 个随机模拟层, 其中包括一个 MCS 模拟层( $k = 1$ )和 11 个 MCMCS 模拟层( $k = 2, 3, \dots, 12$ )。GSS 在第 1 个 MCMCS 模拟层( $k = 2$ )到达系统失效模式失效区, 共需要  $500 + 383 = 883$  个随机样本(见表 3 第 3 列), 采用式(7)估计系统失效概率为  $8.2 \times 10^{-2}$ , 边坡沿滑面 1 破坏的概率为  $6.7 \times 10^{-2}$ 。随着 GSS 模拟层数的增加, 剩余模式的失效域逐渐被逼近,  $E_1, E_4, E_3$  分别第 3, 7, 12 层到达其失效域, 对应的样本数目分别为 1 258, 2 902, 5 152。表 3 同时给出了通过 GSS 划分的每个样本子空间  $\Omega_k$  中的样本数(见表 3 第 5 列), 随着模拟层数的增加,  $\Omega_k$  空间的样本数目先随模拟层变化后逐渐趋于稳定( $N - Np_0$ ), 这主要是由于在模拟初始阶段, GSS 包括多个失效模式, 条件概率  $P(U^{(k+1)}|U^{(k)})$  不断变化(见表 3 第 4 列), 在模式  $E_4$  到达失效域后, GSS 中仅剩一个失效模式, 此时,

$P(U^{(k+1)}|U^{(k)}) = p_0$ 。此外, 随着模拟层数的增加,  $\Omega_k$  空间概率权越来越低(见表 3 第 6 列), 表明 GSS 能够有效探索小概率失效空间。

由于本文岩质边坡计算参数设置条件与 B. K. Low<sup>[13]</sup>一致, 故本文所提方法计算结果仅与 B. K. Low<sup>[13]</sup>结果作对比, 对比结果见表 4, 可以看出, 本文 GSS 计算结果与 B. K. Low<sup>[13]</sup>采用基于 FORM 的系统可靠度界限法得到的结果具有较好的一致性, 这说明本文所提方法可准确估计边坡系统失效概率。值得注意的是, 对于模式  $E_3$ , 本文 GSS 计算结果与 B. K. Low<sup>[13]</sup>采用的直接 MCS 结果差异较大, 这主要是由于模式  $E_3$  的失效概率极低( $10^{-10}$  数量级), 估计这样低的失效概率要求  $100/10^{-10} = 10^{12}$  个 MCS 模拟样本数<sup>[3]</sup>, 而 B. K. Low<sup>[13]</sup>MCS 方法仅用了  $1.6 \times 10^6$  个样本, 因此可能高估该模式的失效概率。为了验证此猜测, 本文同样采用 MCS 对  $E_3$  失效概率进行了估计, 模拟样本数为  $1.0 \times 10^{12}$ , 估计的失效概率为  $3.55 \times 10^{-10}$ , 与本文 GSS 计算结果非常吻合。此外, 应该注意到本文所提方法只需要 5 152 个样本(即表 3 第 3 列样本数目之和)即可准确估计  $P(E_3)$ , 远远低于 MCS 所需样本数目 ( $1.0 \times 10^{12}$ )。

表 3 岩质边坡的 GSS 计算过程

Table 3 Summary of the GSS procedure for the rock slope example

模拟层 $k$	种子样本数目 $N_k$	第 $k$ 层产生的样本数目 $N - N_k$	条件概率 $P(U^{(k+1)} U^{(k)})$	$\Omega_k$ 空间中的样本数目 $L_k$	$\Omega_k$ 空间的概率权 $P(\Omega_k)$	第 $k$ 层的获得的失效模式概率
0	-	-	-	383	$7.66 \times 10^{-1}$	-
1	117	500	0.234	375	$1.75 \times 10^{-1}$	-
2	125	383	0.250	423	$4.95 \times 10^{-2}$	$P(E_s) = 8.2 \times 10^{-2}$ $P(E_2) = 6.7 \times 10^{-2}$
3	77	375	0.154	410	$7.39 \times 10^{-3}$	$P(E_1) = 1.6 \times 10^{-2}$
4	90	423	0.180	406	$1.32 \times 10^{-3}$	-
5	94	410	0.188	405	$2.47 \times 10^{-4}$	-
6	95	406	0.190	450	$5.21 \times 10^{-5}$	-
7	50	405	0.100	450	$5.21 \times 10^{-6}$	$P(E_4) = 6.26 \times 10^{-6}$
8	50	450	0.100	450	$5.21 \times 10^{-7}$	-
9	50	450	0.100	450	$5.21 \times 10^{-8}$	-
10	50	450	0.100	450	$5.21 \times 10^{-9}$	-
11	50	450	0.100	500	$5.21 \times 10^{-10}$	-
12	-	450	-	-	-	$P(E_3) = 1.42 \times 10^{-10}$

注: 当  $k = 1$  时,  $P(U^{(k+1)}|U^{(k)})$  简化为  $P(U^{(1)})$ 。

表 4 与文献的对比结果  
Table 4 Comparison of results obtained from this paper with those reported

计算方法	$P(E_1)$	$P(E_2)$	$P(E_3)$	$P(E_4)$	$P(E_5)$	文献
GSS	$1.69 \times 10^{-2}$	$7.06 \times 10^{-2}$	$1.44 \times 10^{-10}$	$3.40 \times 10^{-6}$	$8.9 \times 10^{-2}$	本文
MCS	$1.80 \times 10^{-2}$	$6.80 \times 10^{-2}$	$3.55 \times 10^{-10}$	$5.00 \times 10^{-6}$	$8.5 \times 10^{-2}$	本文
MCS	$1.80 \times 10^{-2}$	$6.80 \times 10^{-2}$	$6.25 \times 10^{-7}$	$6.25 \times 10^{-6}$	$8.6 \times 10^{-2}$	B. K. Low <sup>[13]</sup>
FORM	$2.40 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-2}$	$1.05 \times 10^{-9}$	$6.91 \times 10^{-6}$		本文
基于 FORM 的界限法	$2.40 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-2}$	$1.05 \times 10^{-9}$	$6.91 \times 10^{-6}$	$7.0 \times 10^{-2} \sim 9.2 \times 10^{-2}$	B. K. Low <sup>[13]</sup>

### 5.3 GSS 与 SS 结果对比

为了进一步说明 GSS 的优越性, 本节对 GSS 和 SS 结果进行了对比。为了估计失效概率的变异系数(COV), 重复计算每个失效模式的失效概率 30 次, 这意味着 GSS 需要进行 30 次随机模拟, 而 SS 需要进行 150 次随机模拟。表 5 给出了 30 次 GSS 与 150 次 SS 的计算结果, 可见 SS 估计的失效概率均值与 GSS 估计的失效概率均值基本一致。表 5 也给出了估计  $P(E_1)$ ,  $P(E_2)$ ,  $P(E_3)$ ,  $P(E_4)$ 和  $P(E_5)$ 时 SS 与 GSS 所需样本数目  $N_T$ 的结果, 可见对于单个模式来说, GSS 与 SS 所需样本数差别不大。为了分析样本数目对可靠度变异性的影响, 定义单位  $UCOV = COV \sqrt{N_T}$ , 用  $UCOV$  来衡量 2 种方法的计算效率。如表 5 所示, 对于模式  $E_2$ ,  $E_3$  和  $E_5$ , GSS 得到的  $UCOV$  略低于 SS, 这表明对这 3 个模式来说 GSS 计算效率略高于 SS。对  $E_1$  和  $E_4$ , GSS 得到的  $UCOV$  略高于 SS, 这表明对这 2 个模式来说 GSS 计算效率略低于 SS, 但是需要指出的是, 对所有失效模式来说, GSS 模拟需要 5 262 个样本(即 30 次模拟所需样本的平均值), 而 SS 需要 11 050 个样本,

总的来说 GSS 计算效率仍然具有明显的优势。此外, 当失效模式数量较多时, SS 需要重复对每个失效模式进行计算计算, 过程较繁琐, 相比之下, GSS 计算更为简单。

### 5.4 多失效模式对应任一失效阈值的失效概率估计

上述分析仅针对临界失效阈值(值为 0)的失效概率进行了估计, 实际工程中可能要求工程师掌握边坡对应于任一失效阈值的失效概率。为此, 需要估计边坡在任一失效阈值时的失效概率。根据表 3 中给出的每个样本子空间  $\Omega_k$  中的样本数  $L_k$  和对应的概率权  $P(\Omega_k)$ , GSS 通过式(9)可有效地估计该岩质边坡多失效模式对应任一失效阈值的失效概率。图 6 给出了岩质边坡多失效模式响应值的累积概率分布图(任一失效阈值对应的失效概率)。图中细实线给出了 30 次 GSS 随机模拟估计的多失效模式响应累积概率分布曲线, 粗实线给出了 MCS 相应的估计结果, 点划线给出了 SS 相应的结果。对于模式  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  及  $E_5$ , GSS 估计的累积概率分布曲线与 MCS, SS 吻合较好, 说明所提权样本方法是有效的。

表 5 岩质边坡 GSS 与 SS 可靠度分析对比结果  
Table 5 Comparison of reliability results for the congress cut slope using GSS and SS

失效模式	失效概率		COV/%		基于 30 次模拟的平均样本数, $N_T$		UCOV	
	SS	GSS	SS	GSS	SS	GSS	SS	GSS
双滑面滑动, $E_1$	$1.18 \times 10^{-2}$	$1.18 \times 10^{-2}$	0.248	0.226	950	1 217	7.64	7.87
滑面 1 滑动, $E_2$	$6.80 \times 10^{-2}$	$6.90 \times 10^{-2}$	0.165	0.156	950	879	5.10	4.63
滑面 2 滑动, $E_3$	$4.61 \times 10^{-10}$	$2.55 \times 10^{-10}$	1.765	1.417	5 000	5 262	124.81	102.85
浮动失效, $E_4$	$5.57 \times 10^{-6}$	$5.59 \times 10^{-6}$	0.782	1.487	3 200	3 177	44.21	83.83
边坡系统, $E_5$	$8.60 \times 10^{-2}$	$8.70 \times 10^{-2}$	0.158	0.138	950	816	4.88	3.93

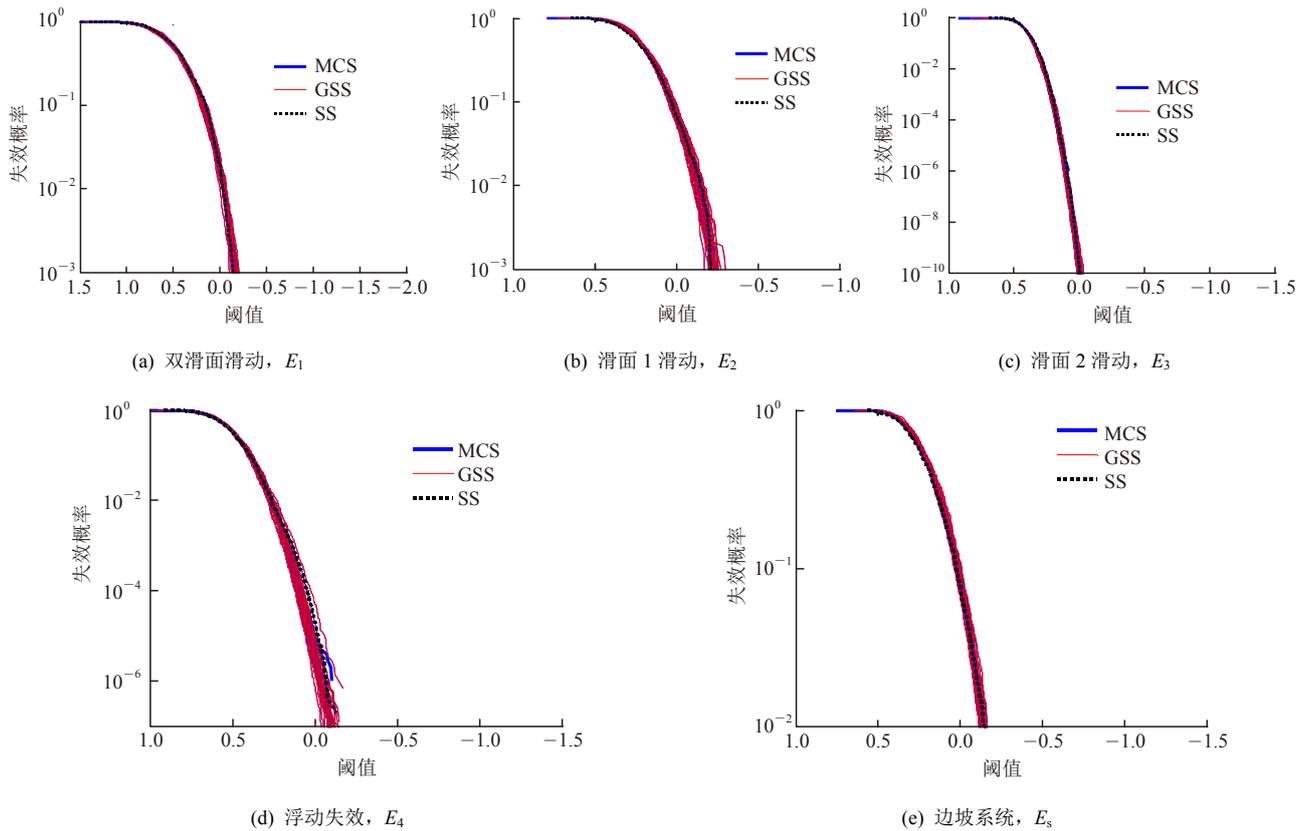


图6 岩质边坡失效模式响应值累积概率分布

Fig.6 Cumulative distribution function of response values of multiple modes of the rock slope

## 6 结论

提出了基于广义子集模拟样本加权法的多失效模式可靠度分析方法,介绍了样本权思想在传统抽样方法 MCS 中的应用,给出了 SS 采用样本权方法估计失效概率的方法,推导了 GSS 中采用样本权方法估计多失效模式在任一失效阈值下失效概率的计算公式。采用岩质边坡楔形体稳定问题验证了所提方法的有效性。主要结论如下:

(1) 本文所提方法能够准确地估计边坡系统失效概率及其分量破坏模式的失效概率。对于具有低失效概率水平的单一模式可靠度问题求解,其计算效率明显优于传统 MCS 方法。

(2) 对于单个失效模式而言,GSS 与 SS 计算效率相当,但对多失效模式来说,GSS 不需要重复对每个模式进行计算,其计算效率明显优于 SS。

(3) 提出的广义子集模拟样本加权方法通过执行一次 GSS 不仅能够高效地估计临界失效阈值对应的失效概率,也能够同时计算多模式在任一失效阈值时的失效概率。

## 参考文献(References):

- [1] ZHAO L, ZUO S, LI L, et al. System reliability analysis of plane slide rock slope using Barton-Bandis failure criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2016, 88(1): 1 - 11.
- [2] 邓志平, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑地层变异性和土体参数变异性的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(6): 986 - 995.(DENG Zhiping, LI Dianqing, CAO Zijun, et al. Slope reliability analysis considering geological uncertainty and spatial variability of soil parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(6): 986 - 995.(in Chinese))
- [3] ANG A H, TANG W H. Probability concepts in engineering: emphasis on applications in civil and environmental engineering[M]. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., 2007: 471 - 478.
- [4] 蒋水华, 李典庆, 曹子君, 等. 考虑参数空间变异性的边坡系统可靠度分析[J]. 应用基础与工程科学学报, 2014, 22(5): 841 - 855. (JIANG Shuihua, LI Dianqing, CAO Zijun, et al. System reliability analysis of slopes considering spatial variability of soil properties[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2014, 22(5): 841 - 855.(in Chinese))
- [5] 李典庆, 周创兵. 考虑多失效模式相关的岩质边坡体系可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(3): 541 - 551.(LI Dianqing, ZHOU

- Chuangbing. System reliability analysis of rock slope considering multiple correlated failure modes[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(3): 541 - 551.(in Chinese)
- [6] 李静萍, 程勇刚, 李典庆, 等. 基于多重响应面法的空间变异土坡系统可靠度分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(1): 147 - 155.(LI Jingping, CHENG Yonggang, LI Dianqing, et al. System reliability analysis of spatially variable soil slopes using the multiple response surfaces method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(1): 147 - 155.(in Chinese))
- [7] 吴震宇, 陈建康, 许唯临, 等. 岩质边坡稳定的体系可靠度分析及工程应用[J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2008, 40(2): 32 - 37.(WU Zhenyu, CHEN Jiankang, XU Weilin, et al. Systematic reliability analysis of rock slope stability and its engineering application[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science, 2008, 40(2): 32 - 37.(in Chinese))
- [8] 祁小辉, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑土体空间变异性的边坡最危险滑动面随机分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(4): 745 - 753.(QI Xiaohui, LI Dianqing, ZHOU Chuangbing, et al. Stochastic analysis method of critical slip surfaces in soil slopes considering spatial variability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(4): 745 - 753.(in Chinese))
- [9] 薛海斌, 党发宁, 尹小涛, 等. 基于岩土材料软化特性的滑坡多级滑动面分析方法研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(11): 3 235 - 3 242.(XUE Haibin, DANG Faning, YIN Xiaotao, et al. Research on analytical method of multi-slip surfaces of landslide based on softening characteristics of geomaterial[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(11): 3 235 - 3 242.(in Chinese))
- [10] 杨智勇, 李典庆, 曹子君, 等. 基于广义子集模拟的土坡系统可靠度分析[J]. 岩土力学, 待刊.(YANG Zhiyong, LI Dianqing, CAO Zijun, et al. System reliability of soil slope using Generalized Subset Simulation[J]. Rock and Soil Mechanics, to be pressed.(in Chinese))
- [11] CHARLTON T S, ROUAINIA M. A probabilistic approach to the ultimate capacity of skirted foundations in spatially variable clay[J]. Structural Safety, 2017, 65: 126 - 136.
- [12] HSU W, CHING J. Evaluating small failure probabilities of multiple limit states by parallel subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25(3): 291 - 304.
- [13] LOW B K. Reliability analysis of rock wedges[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, 123(6): 498 - 505.
- [14] DU X. System reliability analysis with saddle point approximation[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 42(2): 193 - 208.
- [15] ZENG P, JIMENEZ R, LI T. An efficient quasi-Newton approximation-based SORM to estimate the reliability of geotechnical problems[J]. Computers and Geotechnics, 2016, 76: 33 - 42.
- [16] 蒋水华, 魏博文, 姚池, 等. 考虑概率分布影响的低概率水平边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6): 1 071 - 1 080.(JIANG Shuihua, WEI Bowen, YAO Chi, et al. Reliability analysis of soil slopes at low-probability levels considering effect of probability distributions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(6): 1 071 - 1 080.(in Chinese))
- [17] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263 - 277.
- [18] HSU W, CHING J. Evaluating small failure probabilities of multiple limit states by parallel subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25(3): 291 - 304.
- [19] LI H, MA Y, CAO Z. A generalized subset simulation approach for estimating small failure probabilities of multiple stochastic responses[J]. Computers and Structures, 2015, 153: 239 - 251.
- [20] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于极限平衡法和有限元法的边坡协同式可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(6): 1 004 - 1 013.(LI Dianqing, XIAO Te, CAO Zijun, et al. Auxiliary Slope Reliability Analysis Using Limit Equilibrium Analysis and Finite Element Analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(6): 1 004 - 1 013.(in Chinese))
- [21] 李典庆, 肖特, 曹子君, 等. 基于高效随机有限元法的边坡风险评估[J]. 岩土力学, 2016, 37(7): 1 994 - 2 003.(LI Dianqing, XIAO Te, CAO Zijun, et al. Slope risk assessment using efficient random finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(7): 1 994 - 2 003.(in Chinese))
- [22] AU S K, WANG Y. Engineering risk assessment with subset simulation[M]. [S. l.]: John Wiley and Sons, 2014: 157 - 162.
- [23] 李典庆, 周创兵, 胡冉. 基于  $n$  维等效方法的岩质边坡楔体稳定体系可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(7): 1 415 - 1 424.(LI Dianqing, ZHOU Chuangbing, HU Ran. System reliability analysis of rock slope wedge stability based on  $n$ -dimensional equivalent method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(7): 1 415 - 1 424.(in Chinese))
- [24] 谭晓慧, 宋传中, 侯晓亮. 楔形体边坡的系统可靠度分析[J]. 土木建筑与环境工程, 2013, 35(增 1): 90 - 95.(TAN Xiaohui, SONG Chuangzhong, HOU Xiaoliang. Reliability analysis of wedge slopes[J]. Journal of Civil, Architectural and Environmental Engineering, 2013, 35(Supp.1): 90 - 95.(in Chinese))
- [25] 张蕾, 唐小松, 李典庆, 等. 基于 Copula 函数的岩土结构物系统可靠度分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(1): 193 - 202.(ZHANG Lei, TANG Xiaosong, LI Dianqing, et al. System reliability analysis of geotechnical structures based on the Copula function[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(1): 193 - 202.(in Chinese))
- [26] JIMENEZ-RODRIGUEZ R A S N. Rock wedge stability analysis using system reliability methods[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2007, 40(4): 419 - 427.