2017年攻读浙江财经大学硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：601　　科目名称：高等数学

答案请写答题纸上

一、选择题（每小题4分，共32分）

1. 如果$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=$（　　）.

A. 6　　B. -6　　C. 36　　D. -36

2. 若$f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当$\Delta x\to 0$时，则函数$f(x)$在$x=x_0$点处的微分dy是（　　）.

A. 与Δx等价的无穷小　　B. 与Δx同阶的无穷小

C. 与Δx低价的无穷小　　D. 与Δx高阶的无穷小

3. 设$f''(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\ln(1+x)}=1$，则（　　）.

A. $f(0)$是$f(x)$的极大值

B. $f(0)$是$f(x)$的极小值

C. $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

D. $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

4. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$收敛

5. 考虑二元函数$f(x,y)$的下面四条性质：

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续　　②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有两个偏导数连续

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微　　④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　　）.

A. ②⇒③⇒①　　　　B. ③⇒②⇒①

C. ③⇒④⇒①　　　　D. ③⇒①⇒④

6. 函数 $y=f(x)$ 由 $x^y=y^x$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　　　）.

A. $\dfrac{y(\ln x-1)}{x(\ln y-1)}$　　　　B. $\dfrac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$

C. $\dfrac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}$　　　　D. $\dfrac{y^2(\ln y-1)}{x^2(\ln x-1)}$

7. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，x_1 和 x_2 是区间 (a,b) 内的任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 ξ，使得（　　）成立.

A. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 $a<\xi<b$.

B. $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，其中 $x_1<\xi<b$.

C. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$.

D. $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，其中 $a<\xi<x_2$.

8. 设 $f(x)$ 为已知连续函数，若 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，其中 $t>0$，$s>0$，则 I 的值（　　）.

A. 依赖于 s 和 t.　　　　B. 依赖于 s，t，x.

C. 依赖于 t 和 x，不依赖于 s.　　　　D. 依赖于 s，不依赖于 t.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1.曲线 $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ 过原点的切线是________________.

2. 曲线 $y=1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$ 的斜渐近线________________.

3. 已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}dt$, 则 $\int_0^1 xf(x)dx=$________________.

4. 二重积分 $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}xdx=$________________.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-(-1)^n}x^n$ 的收敛域是________________________.

6. 微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为________________________.

三、(10 分) 求极限 $\lim_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^x-e^a\right]$ $\quad a\neq 0$

四、(10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点？

五、(10 分) 求不定积分 $I=\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x.$

六、(10 分) 已知 $f(u)$ 具有连续二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，求 $f(u)$.

七、(12 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

八、(12 分) 计算二重积分 $\iint_D xy\,e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ 其中 $D=\{(x,y)\mid y\geq x\geq 0\}$.

九、（10 分）设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0,0)$，且当 $x \in [0,1]$ 时， $y \geq 0$.

试确定 a, b, c 的值，使得该抛物线与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$，且使所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

十、（10 分）设生产某种产品必须投入两种要素， x_1 和 x_2 分别是两种要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数 $Q = 2x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$，其中常数 $\alpha, \beta > 0,$ 且 $\alpha + \beta = 1$，假设两要素的价格分别为 p_1 和 p_2.求当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小？

十一、证明题：（10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0,$

证明： $f(x)$ 在 (a,b) 上至少有两个零点.